Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti

MATEMATIČKA KULTURA I KOMUNIKACIJA

Vježbe na 1. godini Preddiplomskog sveučilišnog studija

Ranoga i predškolskog odgoja i obrazovanja

Željko Gregorović

SADRŽAJ

I. ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

ZADATCI

1. Koje su od sljedećih rečenica sudovi?

a) Broj 12 je djeljiv brojem 3.	b) $14 > -15$
c) Ljubičasta nejednadžba se smije.	d) Svirajte!
e) Broj n je djeljiv brojem 3.	f) Koliko je sati?
g) Osijek je najveći grad u Hrvatskoj.	h) $3 + 4 = 2 + 5$
i) $14 > 15$	j) 11 je prost broj.
k) Jesi li sretna?	l) Je li danas petak?
m) Danas je petak.	n) Jutro je pametnije od večeri.
o) Svaki brod je jedrenjak.	p) Broj 12 je višekratnik broja x.

Rješenje.

<u>Sud</u> je smislena deklarativna rečenica koja je istinita ili lažna (ne može istovremeno biti i istinita i lažna).

Sud je u zadatku dan pod a), b), g), h), i), j), m) i o).

2. Odredite istinosnu vrijednost svakog suda iz prethodnog zadatka.

Rješenje.

Označimo svaki sud iz prethodnog zadatka velikim slovom te odredimo istinosnu vrijednost sudova.

A: Broj 12 je djeljiv brojem 3.	A je istinit sud.	$\tau(A) = 1$
B: $14 > -15$	B je istinit sud.	$\tau(B) = 1$
C: Osijek je najveći grad u Hrvatskoj.	C je lažan sud	$\tau(C) = 0$
D: $3 + 4 = 2 + 5$	D je istinit sud.	$\tau(D) = 1$
E: $14 > 15$	E je lažan sud.	$\tau(E) = 0$
F: 11 je prost broj.	F je istinit sud.	$\tau(F) = 1$

G: Danas je petak.

Ako je sud G izrečen u petak tada pišemo $\tau(G) = 1$, a ako je izrečen neki drugi dan pišemo $\tau(G) = 0$.

H: Svaki brod je jedrenjak.	H je lažan sud.	$\tau(H) = 0$

3. U $\square$ upišite broj tako da dobiveni sud bude istinit.

A: $\square$ je najmanji prirodni broj.

B: $\square$ je najveći negativni cijeli broj.

C: $\square$ je najmanji prost broj.

D: $\square$ je najmanji dvoznamenkasti prirodni broj.

E: $\square$ je najveći broj u skupu $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right\}$.

F: $\square$ je najmanji broj u skupu $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right\}$.

G: 100 je kvadrat broja $\square$.

H: 1000 je kub broja $\square$.

I: $\square$ je složen broj u skupu $\{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

J: $\square$ je najveći dvoznamenkasti prost broj.

K: $\square$ je najmanji troznamenkasti prost broj.

L: $\square$ je najveći četveroznamenkasti paran broj.

M: $\square$ je dvoznamenkasti prost broj manji od 13.

N: $\frac{1}{\square} > \frac{1}{3}$

O: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \square$

P: $\frac{1}{\square} = 0{,}25$

Rješenje.

A: $\boxed{1}$ je najmanji prirodni broj.

B: $\boxed{-1}$ je najveći negativni cijeli broj.

C: $\boxed{2}$ je najmanji prost broj.

D: $\boxed{10}$ je najmanji dvoznamenkasti prirodni broj.

E: $\boxed{\frac{1}{2}}$ je najveći broj u skupu $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right\}$.

F: $\boxed{\frac{1}{5}}$ je najmanji broj u skupu $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right\}$.

G: 100 je kvadrat broja $\boxed{10}$.

Sud G možemo zapisati i ovako: 100 je kvadrat broja $\boxed{-10}$.

H: 1000 je kub broja $\boxed{10}$.

I: $\boxed{9}$ je složen broj u skupu $\{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

J: $\boxed{97}$ je najveći dvoznamenkasti prost broj.

K: $\boxed{101}$ je najmanji troznamenkasti prost broj.

L: $\boxed{9998}$ je najveći četveroznamenkasti paran broj.

M: $\boxed{11}$ je dvoznamenkasti prost broj manji od 13.

N: $\frac{1}{\boxed{2}} > \frac{1}{3}$

O: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boxed{1}$

P: $\frac{1}{\boxed{4}}=0{,}25$

4. Negirajte sud te odredite istinosnu vrijednost negacije suda.

a) A: 5 je prost broj. b) B: $3>5$

c) C: Postoji trokut koji nije raznostraničan. d) D: $\frac{5}{6}\in\mathbb{N}$

e) E: Svaki paran broj je djeljiv s 2.

Rješenje.

Negacija suda A je sud koji negira ono što sud A tvrdi.

a) $\neg$A: 5 nije prost broj. $\tau(\neg A)=0$

b) $\neg$B: $3\leq 5$ $\tau(\neg B)=1$

c) $\neg$C: Svaki trokut je raznostraničan. $\tau(\neg C)=0$

d) $\neg$D: $\frac{5}{6}\notin\mathbb{N}$ $\tau(\neg D)=1$

e) $\neg$E: Postoji paran broj koji nije djeljiv s 2. $\tau(\neg E)=0$

5. Odredite istinosnu vrijednost konjunkcije danih sudova.

a)	b)	c)	d)
A: $-4>-8$	A: Siječanj ima 31 dan.	A: $\frac{5}{6}\in\mathbb{N}$	A: $20\ \mathrm{cm}^2 = 2000\ \mathrm{mm}^2$
B: $\sqrt{16}=4$	B: Ožujak ima 30 dana.	B: $-5\in\mathbb{N}$	B: $20\ \mathrm{dl} = 2\ \mathrm{l}$

Rješenje.

Konjunkcija sudova A i B je složen sud koji je istinit točno onda kada su oba suda A i B istinita.

a) $A\wedge B$: $-4>-8$ i $\sqrt{16}=4$.
Kako je $\tau(A)=1$ i $\tau(B)=1$ slijedi da je $\tau(A\wedge B)=1$, odnosno sud $A\wedge B$ je istinit jer su oba suda A i B istinita.

b) $A\wedge B$: Siječanj ima 31 dan i ožujak ima 30 dana.
Kako je $\tau(A)=1$ i $\tau(B)=0$ slijedi da je $\tau(A\wedge B)=0$.

c) $A\wedge B$: $\frac{5}{6}\in\mathbb{N}$ i $-5\in\mathbb{N}$.
Kako je $\tau(A)=0$ i $\tau(B)=0$ slijedi da je $\tau(A\wedge B)=0$.

d) $A\wedge B$: $20\ \mathrm{cm}^2 = 2000\ \mathrm{mm}^2$ i $20\ \mathrm{dl}=2\ \mathrm{l}$.
Kako je $\tau(A)=1$ i $\tau(B)=1$ slijedi da je $\tau(A\wedge B)=1$.

6. Odredite istinosnu vrijednost inkluzivne disjunkcije danih sudova.

a)	b)	c)
A: 10 je složen broj.	A: Svibanj ima 30 dana.	A: Broj 2 je neparan broj.
B: 8 je prost broj.	B: Siječanj ima 31 dan.	B: Broj 7 je djelitelj broja 1.

Rješenje.
<u>Inkluzivna disjunkcija sudova</u> A i B je složen sud koji je lažan točno onda kada su oba suda A i B lažna.

a) $A \vee B$: 10 je složen broj ili je 8 prost broj.
Kako je $\tau(A) = 1$ i $\tau(B) = 0$ slijedi da je $\tau(A \vee B) = 1$.

b) $A \vee B$: Svibanj ima 30 dana ili siječanj ima 31 dan.
Kako je $\tau(A) = 0$ i $\tau(B) = 1$ slijedi da je $\tau(A \vee B) = 1$.

c) $A \vee B$: Broj 2 je neparan broj ili je broj 7 djelitelj broja 1.
Kako je $\tau(A) = 0$ i $\tau(B) = 0$ slijedi da je $\tau(A \vee B) = 0$.

7. Napišite ekskluzivnu disjunkciju sudova A i B.

A: Sutra ću urediti bakin vrt.

B: Sutra ću cijeli dan učiti u knjižnici.

Rješenje.

$A \veebar B$: Sutra ću ili urediti bakin vrt ili ću cijeli dan učiti u knjižnici.

8. Odredite istinosnu vrijednost suda $A \Longrightarrow B$ za dane sudove.

a)	b)	c)
A: Kvadrat je pravokutnik.	A: 100 je paran broj.	A: $4 = 7$
B: Kvadrat je kvadar.	B: Travanj ima 30 dana.	B: $100 > 5$

Rješenje.
<u>Implikacija dvaju sudova</u> A i B $(A \Longrightarrow B)$ *je složen sud koji je lažan točno onda kada je sud A istinit i sud B lažan.*

a) $A \Longrightarrow B$: Ako je kvadrat pravokutnik, onda je kvadrat kvadar.
Kako je $\tau(A) = 1$ i $\tau(B) = 0$ slijedi da je $\tau(A \Longrightarrow B) = 0$.

b) $A \Longrightarrow B$: Ako je 100 paran broj, onda travanj ima 30 dana.
Kako je $\tau(A) = 1$ i $\tau(B) = 1$ slijedi da je $\tau(A \Longrightarrow B) = 1$.

c) $A \Longrightarrow B$: Ako je $4 = 7$, onda je $100 > 5$.
Kako je $\tau(A) = 0$ i $\tau(B) = 1$ slijedi da je $\tau(A \Longrightarrow B) = 1$.

9. Odredite istinosnu vrijednost suda $A \Leftrightarrow B$ za dane sudove.

a)	b)	c)
A: Kvadrat je pravokutnik.	A: Kruška nije voće.	A: $4 = 7$
B: Kvadrat je kvadar.	B: Svaki dan je sunčan.	B: $100 > 5$

Rješenje.

<u>Ekvivalencija sudova</u> A i B je složen sud koji je istinit točno onda kada su oba suda A i B istinita ili kada su oba suda A i B lažna.

a) $A \Leftrightarrow B$: Kvadrat je pravokutnik ako i samo ako je kvadrat kvadar.

Kako je $\tau(A) = 1$ i $\tau(B) = 0$ slijedi da je $\tau(A \Leftrightarrow B) = 0$.

b) $A \Leftrightarrow B$: Kruška nije voće ako i samo ako je svaki dan sunčan.

Kako je $\tau(A) = 0$ i $\tau(B) = 0$ slijedi da je $\tau(A \Leftrightarrow B) = 1$.

c) $A \Leftrightarrow B$: $4 = 7$ ako i samo ako je $100 > 5$.

Kako je $\tau(A) = 0$ i $\tau(B) = 1$ slijedi da je $\tau(A \Leftrightarrow B) = 0$.

10. (zadatak za vježbu)

Zadan je složeni sud $A \wedge B$: Svaka kocka ima šest strana i jaglac nije proljetnica.

Na osnovu zadanog suda zapišite sudove:

$$A,\ B,\ \neg A,\ \neg B,\ A \vee B,\ A \underline{\vee} B,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A,\ A \Leftrightarrow B.$$

Odredite istinosnu vrijednost svih sudova iz zadatka.

Rješenje.

$A \wedge B$: Svaka kocka ima šest strana i jaglac nije proljetnica. $\tau(A \wedge B) = 0$

A: Svaka kocka ima šest strana. $\tau(A) = 1$

B: Jaglac nije proljetnica. $\tau(B) = 0$

$\neg A$: Postoji kocka koja nema šest strana. $\tau(\neg A) = 0$

$\neg B$: Jaglac je proljetnica. $\tau(\neg B) = 1$

$A \vee B$: Svaka kocka ima šest strana ili jaglac nije proljetnica. $\tau(A \vee B) = 1$

$A \underline{\vee} B$: Ili svaka kocka ima šest strana ili jaglac nije proljetnica. $\tau(A \underline{\vee} B) = 1$

$A \Rightarrow B$: Ako svaka kocka ima šest strana onda jaglac nije proljetnica. $\tau(A \Rightarrow B) = 0$

$B \Rightarrow A$: Ako jaglac nije proljetnica onda svaka kocka ima šest strana. $\tau(B \Rightarrow A) = 1$

$A \Leftrightarrow B$: Svaka kocka ima šest strana ako i samo ako jaglac nije proljetnica.

$\tau(A \Leftrightarrow B) = 0$

11. Konstruirajte semantičku tablicu za dani složeni sud.

a) $A \Longrightarrow (A \vee B)$ b) $\neg A \vee \neg B$ c) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow B$

d) $(A \vee B) \Longrightarrow (A \wedge B)$ e) $(\neg A \wedge \neg B) \Longleftrightarrow A$ f) $(\neg A \vee B) \Longrightarrow \neg C$

Rješenje.

a)

A	B	$A \vee B$	$A \Longrightarrow (A \vee B)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

b)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

c)

A	B	$A \Longrightarrow B$	$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

d)

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$(A \vee B) \Longrightarrow (A \wedge B)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

e)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(\neg A \wedge \neg B) \Longleftrightarrow A$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

f)

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg C$	$(\neg A \vee B) \Longrightarrow \neg C$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

12. Dokažite da vrijedi:

a) $A \vee 0 \equiv A$ b) $A \wedge 1 \equiv A$

c) $A \wedge \neg A \equiv 0$ d) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

e) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ f) $\neg(A \Longrightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

g) $A \Longleftrightarrow B \equiv (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ h) $A \vee B \equiv B \vee A$

i) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ j) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

k) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Rješenje.

a)

A	0	$A \lor 0$	A
0	0	**0**	**0**
1	0	**1**	**1**

$A \lor 0 \equiv A$

b)

A	1	$A \land 1$	A
0	1	**0**	**0**
1	1	**1**	**1**

$A \land 1 \equiv A$

c)

A	$\neg A$	$A \land \neg A$	0
0	1	**0**	**0**
1	0	**0**	**0**

$A \land \neg A \equiv 0$

d)

A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$

e)

A	B	$A \lor B$	$\neg(A \lor B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \land \neg B$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$

f)

A	B	$A \Longrightarrow B$	$\neg(A \Longrightarrow B)$	$\neg B$	$A \land \neg B$
0	0	1	**0**	1	**0**
0	1	1	**0**	0	**0**
1	0	0	**1**	1	**1**
1	1	1	**0**	0	**0**

$\neg(A \Longrightarrow B) \equiv A \land \neg B$

g)

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	**0**	1	0	**0**
1	0	**0**	0	1	**0**
1	1	**1**	1	1	**1**

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

h)

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$
0	0	**0**	**0**
0	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**
1	1	**1**	**1**

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

i)

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
0	0	**0**	**0**
0	1	**0**	**0**
1	0	**0**	**0**
1	1	**1**	**1**

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

j)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	1	**0**
0	1	0	0	**0**	1	0	**0**
0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	0	**1**	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**	1	1	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

k)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

13. (zadatak za vježbu) Ispitajte vrijedi li semantička jednakost.

a) $A \Rightarrow B \equiv B \Rightarrow A$

b) $A \wedge \neg B \equiv \neg A \wedge B$.

Rješenje.

a)

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Jednakost ne vrijedi.
Pišemo $A \Rightarrow B \not\equiv B \Rightarrow A$.

b)

A	B	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A$	$\neg A \wedge B$
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Jednakost ne vrijedi.
Pišemo $A \Rightarrow B \not\equiv B \Rightarrow A$.

14. (zadatak za vježbu) Odredite istinosnu vrijednost suda.

a) $A\colon \frac{1}{7} > \frac{1}{3}$ b) $B\colon 1 < 3 \ \wedge \ 3 < 5$ c) $C\colon \frac{3}{5} : \frac{3}{5} = 1$

d) $D\colon \frac{5}{6} \in \mathbb{N} \ \wedge \ 1 > \frac{1}{3}$ e) $E\colon \frac{1}{2} > 0{,}4 \ \wedge \ 5^2 > 2^5$ f) $F\colon \frac{5}{6} \in \mathbb{N} \ \vee \ 1 > \frac{1}{3}$

Rješenje.

a) $\tau(A) = 0$ b) $\tau(B) = 1$ c) $\tau(C) = 1$ d) $\tau(D) = 0$ e) $\tau(E) = 0$ f) $\tau(F) = 1$

15. Provjerite je li dani sud tautologija.

a) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$

b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

c) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$

d) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

e) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

f) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

g) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$

Rješenje.

a)

A	$A \wedge A$	$(A \wedge A) \Leftrightarrow A$
0	0	**1**
1	1	**1**

Dani sud je tautologija.

b)

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
0	0	0	0	**1**
0	1	0	0	**1**
1	0	0	0	**1**
1	1	1	1	**1**

Dani sud je tautologija.

c)

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
0	0	0	0	**1**
0	1	1	1	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	1	1	**1**

Dani sud je tautologija.

d)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
0	0	0	1	1	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	0	**1**
1	0	1	0	0	1	0	**1**
1	1	1	0	0	0	0	**1**

Dani sud je tautologija.

e)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1	1	**1**
0	1	1	0	1	1	**1**
1	0	0	1	0	0	**1**
1	1	1	0	0	1	**1**

Dani sud je tautologija.

f)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
0	0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	1	1	**1**
1	1	1	0	0	0	**1**

Dani sud je tautologija.

g)

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Dani sud nije tautologija.

16. Zapišite obrat, inverziju i kontrapoziciju danog suda.

a) $P \Longrightarrow Q: x = 3 \Longrightarrow x < 10$.

b) $P \Longrightarrow Q$: Ako je četverokut kvadrat, onda je četverokut pravokutnik.

c) $P \Longrightarrow Q$: Ako je vani hladno, onda nosim kaput.

d) $P \Longrightarrow Q$: Ako je jutro, onda sunce zalazi.

Rješenje.

a) Obrat suda.

$Q \Longrightarrow P: x < 10 \Longrightarrow x = 3$. (Ako je x manji od 10, onda je x jednak 3.)

Inverzija suda (suprotni sud).

$\neg P \Longrightarrow \neg Q: x \neq 3 \Longrightarrow x \geq 10$. (Ako je x različit od 3, onda je x veći ili jednak od 10.)

Kontrapozicija suda (obrat po kontrapoziciji).

$\neg Q \Longrightarrow \neg P: x \geq 10 \Longrightarrow x \neq 3$. (Ako je x veći ili jednak od 10, onda je x različit od 3.)

b) Obrat suda.

$Q \Longrightarrow P$: Ako je četverokut pravokutnik, onda je četverokut kvadrat.

Inverzija suda (suprotni sud).

$\neg P \Longrightarrow \neg Q$: Ako četverokut nije kvadrat, onda četverokut nije pravokutnik.

Kontrapozicija suda (obrat po kontrapoziciji).

$\neg Q \Longrightarrow \neg P$: Ako četverokut nije pravokutnik, onda četverokut nije kvadrat.

c) Obrat suda.

$Q \Longrightarrow P$: Ako nosim kaput, onda je vani hladno.

Inverzija suda (suprotni sud).

$\neg P \Longrightarrow \neg Q$: Ako vani nije hladno, onda ne nosim kaput.

Kontrapozicija suda (obrat po kontrapoziciji).

$\neg Q \Longrightarrow \neg P$: Ako ne nosim kaput, onda vani nije hladno.

d) Obrat suda.

$Q \Longrightarrow P$: Ako sunce zalazi, onda je jutro.

Inverzija suda (suprotni sud).

$\neg P \Longrightarrow \neg Q$: Ako nije jutro, onda sunce ne zalazi.

Kontrapozicija suda (obrat po kontrapoziciji).

$\neg Q \Longrightarrow \neg P$: Ako sunce ne zalazi, onda nije jutro.

17. Konstruirajte semantičku tablicu za dani složeni sud

$$\big(\neg A \lor (B \land A)\big) \Leftrightarrow \big(\neg(B \Rightarrow A)\big).$$

Je li dani sud tautologija?

Rješenje.

A	B	$\neg A$	$B \land A$	$\neg A \lor (B \land A)$	$B \Rightarrow A$	$\neg(B \Rightarrow A)$	$\big(\neg A \lor (B \land A)\big) \Leftrightarrow \big(\neg(B \Rightarrow A)\big)$
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0

Dani sud nije tautologija.

18. Konstruirajte semantičku tablicu za dani složeni sud

$$\big(\neg(A \land C)\big) \Leftrightarrow \big(\neg C \Rightarrow (A \lor B)\big).$$

Je li dani sud tautologija?

Rješenje.

A	B	C	$A \land C$	$\neg(A \land C)$	$\neg C$	$A \lor B$	$\neg C \Rightarrow (A \lor B)$	$\big(\neg(A \land C)\big) \Leftrightarrow \big(\neg C \Rightarrow (A \lor B)\big).$
0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0

Dani sud nije tautologija.

19. (zadatak za vježbu) Konstruirajte semantičku tablicu za dani složeni sud

$$\big((\neg A \land C) \lor B\big) \Leftrightarrow (C \Rightarrow \neg B).$$

Je li dani sud tautologija?

Rješenje.

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \land C$	$(\neg A \land C) \lor B$	$\neg B$	$C \Rightarrow \neg B$	$((\neg A \land C) \lor B) \Leftrightarrow (C \Rightarrow \neg B)$
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0

Dani sud nije tautologija.

20. a) Umjesto upitnika napišite prirodni broj tako da sudovi A, B i C budu istiniti.

A: $\underline{\ ?\ }$ je prost broj u skupu $\{8, 9, 10, 11\}$.

B: $23 + 7 \cdot (15 - 20 : 5) = \underline{\ ?\ }$

C: $37\ \text{dm}^2 - \underline{\ ?\ }\ \text{cm}^2 = 90700\ \text{mm}^2$

b) S obzirom na zadane sudove A, B i C iz zadatka pod a) zapišite sud

b_1) $A \lor C$ b_2) $B \land \neg A$ b_3) $A \Longrightarrow B$.

c) Za sud $A \Longrightarrow B$ napišite obrat i kontrapoziciju.

d) Odredite istinosnu vrijednost svakog suda iz zadatka pod b) i c).

Rješenje.

a) A: 11 je prost broj u skupu $\{8, 9, 10, 11\}$.

$23 + 7 \cdot (15 - 20 : 5) = 23 + 7 \cdot (15 - 4) = 23 + 7 \cdot 11 = 23 + 77 = 100$

B: $23 + 7 \cdot (15 - 20 : 5) = 100$

$37\ \text{dm}^2 - 90700\ \text{mm}^2 = 3700\ \text{cm}^2 - 907\ \text{cm}^2 = 2793\ \text{cm}^2$

C: $37\ \text{dm}^2 - 2793\ \text{cm}^2 = 90700\ \text{mm}^2$

b)

b_1) $A \lor C$: 11 je prost broj u skupu $\{8, 9, 10, 11\}$ ili $37\ \text{dm}^2 - 2793\ \text{cm}^2 = 90700\ \text{mm}^2$.

b_2) $\neg A$: 11 nije prost broj u skupu $\{8, 9, 10, 11\}$.

$B \land \neg A$: $23 + 7 \cdot (15 - 20 : 5) = 100$ i 11 nije prost broj u skupu $\{8, 9, 10, 11\}$.

b_3) $A \Longrightarrow B$: Ako je 11 prost broj u skupu $\{8, 9, 10, 11\}$, onda je $23 + 7 \cdot (15 - 20 : 5) = 100$.

c)
Obrat suda.

$B \Longrightarrow A$: Ako je $23 + 7 \cdot (15 - 20 : 5) = 100$ onda je 11 prost broj u skupu $\{8, 9, 10, 11\}$.

Kontrapozicija suda.

$\neg B \Longrightarrow \neg A$: Ako $23 + 7 \cdot (15 - 20 : 5) \neq 100$ onda 11 nije prost broj u skupu $\{8, 9, 10, 11\}$.

d) Zadani sudovi A, B i C su istiniti, odnosno vrijedi $\tau(A) = 1, \tau(B) = 1$ i $\tau(C) = 1$.

A	B	C	$A \lor C$	$\neg A$	$B \land \neg A$	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Longrightarrow \neg A$
1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1

$$\tau(A \lor C) = 1, \tau(B \land \neg A) = 0, \tau(A \Longrightarrow B) = 1, \tau(B \Longrightarrow A) = 1, \tau(\neg B \Longrightarrow \neg A) = 1.$$

21. Dani su sudovi:

A: Svaki trokut je raznostraničan.

B: $3900\ \mathrm{dm}^2 + 10000\ \mathrm{cm}^2 = 40\ \mathrm{m}^2$

C: $1900\ \mathrm{dl} > 19\ \mathrm{l}$

D: $20 + 100 : 5 \cdot 4 = 25$

a) S obzirom na dane sudove zapišite sud

a₁) $\neg A$ a₂) $B \wedge C$ a₃) $C \Rightarrow A$ a₄) $D \vee A$.

b) Odredite istinosnu vrijednost zadanih sudova A, B, C, D i svakog suda iz zadatka pod a).

Rješenje.

a)

a_1) $\neg A$: Postoji trokut koji nije raznostraničan.

a_2) $B \wedge C$: $3900\ \mathrm{dm}^2 + 10000\ \mathrm{cm}^2 = 40\ \mathrm{m}^2$ i $1900\ \mathrm{dl} > 19\ \mathrm{l}$.

a_3) $C \Rightarrow A$: Ako je $1900\ \mathrm{dl} > 19\ \mathrm{l}$ onda je svaki trokut raznostraničan.

a_4) $D \vee A$: $20 + 100 : 5 \cdot 4 = 25$ ili je svaki trokut raznostraničan.

b)

A: Svaki trokut je raznostraničan.
Sud A je lažan sud. $\tau(A) = 0$.

B: $3900\ \mathrm{dm}^2 + 10000\ \mathrm{cm}^2 = 40\ \mathrm{m}^2$

Sud B je istinit jer je $3900\ \mathrm{dm}^2 + 10000\ \mathrm{cm}^2 = 39\ \mathrm{m}^2 + 1\ \mathrm{m}^2 = 40\ \mathrm{m}^2$.

$\tau(B) = 1$.

C: $1900\ \mathrm{dl} > 19\ \mathrm{l}$

Sud C je istinit jer je $1900\ \mathrm{dl} = 190\ \mathrm{l} > 19\ \mathrm{l} = 190\ \mathrm{dl}$.

$\tau(C) = 1$.

D: $20 + 100 : 5 \cdot 4 = 25$

Sud D je lažan jer je $20 + 100 : 5 \cdot 4 = 20 + 20 \cdot 4 = 20 + 80 = 100 \neq 25$.

$\tau(D) = 0$.

A	$\neg A$
0	1

$\tau(\neg A) = 1$

B	C	$B \wedge C$
1	1	1

$\tau(B \wedge C) = 1$

A	C	$C \Rightarrow A$
0	1	0

$\tau(C \Rightarrow A) = 0$

A	D	$D \vee A$
0	0	0

$\tau(D \vee A) = 0$

22. (zadatak za vježbu) Dani su sudovi:

A: Svaki kvadar ima 12 bridova.

B: $3 \text{ m} - 59 \text{ cm} = 2410 \text{ dm}$

C: $180 \text{ dag} + 300 \text{ g} \leq 2 \text{ kg}$

D: 91 je prost broj.

a) S obzirom na dane sudove zapišite sud

a1) $\neg A$ a2) $B \wedge D$ a3) $A \Longrightarrow C$ a4) $D \Longleftrightarrow A$.

b) Odredite istinosnu vrijednost zadanih sudova A, B, C, D i svakog suda iz zadatka pod a).

Rješenje.

a)

a1) $\neg A$: Postoji kvadar koji nema 12 bridova.

a2) $B \wedge D$: $3 \text{ m} - 59 \text{ cm} = 2410 \text{ dm}$ i 91 je prost broj.

a3) $A \Longrightarrow C$: Ako svaki kvadar ima 12 bridova, onda je $180 \text{ dag} + 300 \text{ g} \leq 2 \text{ kg}$.

a4) $D \Longleftrightarrow A$: 91 je prost broj ako i samo ako svaki kvadar ima 12 bridova.

b)

A: Svaki kvadar ima 12 bridova.

Sud A je istinit sud. $\tau(A) = 1$.

B: $3 \text{ m} - 59 \text{ cm} = 2410 \text{ dm}$

Sud B je lažan jer je

$$3 \text{ m} - 59 \text{ cm} = 300 \text{ cm} - 59 \text{ cm} = 241 \text{ cm} < 24100 \text{ cm} = 2410 \text{ dm}$$

$\tau(B) = 0$.

C: $180 \text{ dag} + 300 \text{ g} \leq 2 \text{ kg}$

Sud C je lažan jer je

$$180 \text{ dag} + 300 \text{ g} = 1800 \text{ g} + 300 \text{ g} = 2100 \text{ g} > 2000 \text{ g} = 2 \text{ kg}.$$

$\tau(C) = 0$.

D: 91 je prost broj.

Broj 91 je djeljiv s 1, 7, 13 i 91 pa nije prost broj.

$\tau(D) = 0$.

A	$\neg A$
1	0

$\tau(\neg A) = 0$

B	D	$B \wedge D$
0	0	0

$\tau(B \wedge D) = 0$

A	C	$A \Rightarrow C$
1	0	0

$\tau(A \Rightarrow C) = 0$

A	D	$D \Leftrightarrow A$
1	0	0

$\tau(D \Leftrightarrow A) = 0$

23. Dani su sudovi:

P: $\frac{2}{5} \leq -1$

Q: Godina ima 10 mjeseci.

R: Pravokutnik ima dva para paralelnih stranica.

Odredite istinosnu vrijednost sudova P, Q, R te istinosnu vrijednost sljedećeg suda

a) $(P \wedge Q) \vee R$ b) $\neg P \vee (Q \wedge R)$.

Rješenje.

Kako je $\tau(P) = 0, \tau(Q) = 0$ i $\tau(R) = 1$ slijedi

a)

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$
0	0	1	0	1

$\tau\big((P \wedge Q) \vee R\big) = 1$

b)

P	Q	R	$Q \wedge R$	$\neg P$	$\neg P \vee (Q \wedge R)$
0	0	1	0	1	1

$\tau\big(\neg P \vee (Q \wedge R)\big) = 1$

24. Odredite istinosnu vrijednost suda A, B, C ako je

a) $\tau\big((A \Rightarrow \neg B) \vee C\big) = 0$

b) $\tau\big((A \wedge \neg C) \Rightarrow B\big) = 0$

c) $\tau\big((A \wedge \neg C) \wedge B\big) = 1$.

Rješenje.

a) Sud $(A \Rightarrow \neg B) \vee C$ je lažan jedino ako je sud $A \Rightarrow \neg B$ lažan i sud C lažan, stoga vrijedi da je $\tau(A \Rightarrow \neg B) = 0$ i $\tau(C) = 0$. Sud C je lažan.

Sud $A \Rightarrow \neg B$ je lažan jedino ako je sud A istinit i sud $\neg B$ lažan pa vrijedi da je $\tau(A) = 1$ i $\tau(\neg B) = 0$. Sud A je istinit.

Sud $\neg B$ je lažan pa je sud B istinit, odnosno $\tau(B) = 1$. Sud B je istinit.

Kraće možemo zapisati u tablici:

$(A \Rightarrow \neg B) \vee C$	$A \Rightarrow \neg B$	C	A	$\neg B$	B
0	0	0	1	0	1

$\tau(A) = 1, \tau(B) = 1$ i $\tau(C) = 0$.

b)

$(A \wedge \neg C) \Rightarrow B$	$A \wedge \neg C$	B	A	$\neg C$	C
0	1	0	1	1	0

$\tau(A) = 1, \tau(B) = 0$ i $\tau(C) = 0$.

c)

$(A \wedge \neg C) \wedge B$	$A \wedge \neg C$	B	A	$\neg C$	C
1	1	1	1	1	0

$\tau(A) = 1, \tau(B) = 1$ i $\tau(C) = 0$.

25. (zadatak za vježbu) Konstruirajte semantičku tablicu za dani složeni sud.

a) $\big((P \vee \neg Q) \wedge P\big) \Rightarrow (P \wedge \neg Q)$

b) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \wedge (Q \Rightarrow P)$

c) $(\neg(P \wedge Q) \wedge P) \Rightarrow (P \vee \neg Q)$

d) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

e) $(P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (Q \vee \neg P)$

f) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

g) $(P \wedge \neg R) \Rightarrow \neg Q$

h) $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow \neg P)\big) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg R)$

26. (zadatak za vježbu) Pomoću tablice istinitosti provjerite je li sljedeći složeni sud tautologija.

a) $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

b) $(P \Rightarrow R) \Rightarrow \big(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \Rightarrow R\big)$

c) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q)$

d) $(P \vee Q) \wedge P \Rightarrow (P \vee \neg Q)$

e) $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

f) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

g) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

h) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \wedge Q) \vee (Q \wedge P)\big)$.

27. (zadatak za vježbu)

a) Umjesto upitnika napišite prirodan broj tako da sudovi A i B budu istiniti, a sud C lažan sud.

A: Svaka kocka ima $\boxed{?}$ bridova.

B: 43 kg – 17800 g $< \boxed{?}$ dag

C: $\boxed{?}$ je prost broj.

b) S obzirom na dane sudove iz a) zapišite sud:

$b_1)$ $\neg A$ $\quad b_2)$ $A \veebar C$ $\quad b_3)$ $C \vee \neg A$ $\quad b_4)$ $B \Leftrightarrow C$ $\quad b_5)$ $C \Rightarrow A$.

c) Za sud $C \Rightarrow A$ zapišite obrat, kontrapoziciju i inverziju.

d) Odredite istinosnu vrijednost svakog suda iz zadatka pod b) i c).

II. SKUPOVI I OPERACIJE SA SKUPOVIMA

ZADATCI

1. Zadan je skup
   a) $A = \{x: 3 \leq x < 9, x \in \mathbb{N}\}$. Je li 3 element skupa A?
   b) $B = \{x: 3 < x < 9, x \in \mathbb{N}\}$. Je li 3 element skupa B?
   c) $C = \{x: 5 < x < 7, x \in \mathbb{N}\}$. Je li 5 element skupa C?

Rješenje.

a) $A = \{x: 3 \leq x < 9, x \in \mathbb{N}\} = \{3,4,5,6,7,8\}$. 3 je element skupa A. Pišemo $3 \in A$.

b) $B = \{x: 3 < x < 9, x \in \mathbb{N}\} = \{4,5,6,7,8\}$. 3 nije element skupa B. Pišemo $3 \notin B$.

c) $C = \{x: 5 < x < 7, x \in \mathbb{N}\} = \{6\}$. $5 \notin C$.

2. Ispišite elemente skupa, a potom odredite kardinalni broj skupa.
   a) $A = \{x: 2 \leq x < 6 \wedge x \in \mathbb{N}\}$
   b) $B = \{x: -4 \leq x < 1 \wedge x \in \mathbb{N}\}$
   c) $C = \{x: -4 \leq x \leq 1 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$
   d) $D = \left\{x: \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{4} \wedge x \in \mathbb{Z}\right\}$
   e) $E = \left\{x: \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{Z}\right\}$
   f) $F = \{x: -2 < x + 5 < 6 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$
   g) $G = \{x: x < 50 \wedge x \text{ je djeljiv s } 11 \wedge x \in \mathbb{N}\}$

Rješenje.

a) $A = \{2,3,4,5\}, k(A) = 4$
b) $B = \emptyset, k(B) = 0$
c) $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}, k(C) = 6$
d) $D = \{1\}, k(D) = 1$
e) $E = \emptyset, k(E) = 0$
f) $F = \{x: -2 < x + 5 < 6 \wedge x \in \mathbb{Z}\} = \{x: -2 - 5 < x + 5 - 5 < 6 - 5 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$

$$= \{x: -7 < x < 1 \wedge x \in \mathbb{Z}\} = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}, k(F) = 7$$

g) $G = \{11, 22, 33, 44\}, k(G) = 4$

3. Ispitajte jesu li dani skupovi jednaki.

   a) $A = \{1, a, 3, x\}$
   $B = \{a, x, 1, 3\}$

   b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Rješenje.

a) Svaki element skupa A ujedno je i element skupa B i obrnuto svaki element skupa B ujedno je i element skupa A. Zaključujemo da vrijedi jednakost skupova i pišemo $A = B$.

b) Skupovi A i B nisu jednaki jer $7 \in B$, ali $7 \notin A$. Pišemo $A \neq B$.

4.

a) Dani su skupovi $C = \{1,3, x, 5,8,9\}$ i $D = \{7, 3, 5, y, 1,9\}$. Odredite x i y tako da je $C = D$.

b) Dani su skupovi $E = \{a, 3, 4, 8, 9\}$ i $F = \{1, 3, 8, 9, b\}$. Odredite a i b tako da vrijedi $E = F$.

Rješenje.

a) $x = 7, y = 8$ b) $a = 1, b = 4$.

5. Odredite partitivni skup skupa A ako je

a) $A = \{1, 3, 5\}$ b) $A = \{x, y, 3, 5\}$ c) $A = \{x: -4 < x \leq 2 \land x \in \mathbb{N}\}$.

Koliki je kardinalni broj dobivenog partitivnog skupa?

Rješenje.

a) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$,
$k(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$.

b) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{3\}, \{5\}, \{x, y\}, \{x, 3\}, \{x, 5\}, \{y, 3\}, \{y, 5\}, \{3, 5\}, \{x, y, 3\}, \{x, y, 5\},$
$\{x, 3, 5\}, \{y, 3, 5\}, \{x, y, 3,5\}\}$,

$k(\mathcal{P}(A)) = 2^4 = 16$.

b) $A = \{x: -4 < x \leq 2 \land x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $k(\mathcal{P}(A)) = 2^2 = 4$.

6. Odredite uniju sljedećih skupova.

a) $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 11\}$

b) $P = \{7, 8, 11, 12\}$
$R = \{7, 9, 10, 12\}$

Rješenje.

$$A \cup B = \{x: x \in A \lor x \in B\}$$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 11\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$

b) $P \cup R = \{7, 8, 9, 10, 11,12\}$

7. Odredite presjek sljedećih skupova.

a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$

b) $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$D = \{2, 4, 6, 8\}$

c) $X = \{x: 3 < x < 9, x \in \mathbb{N}\}$
$Y = \{x: x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$

Rješenje.

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

a) $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$= \{3, 5, 7\}$

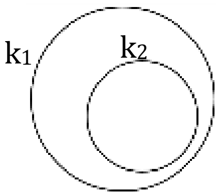
b) $C \cap D = \emptyset$

c) $X = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$X \cap Y = \{4, 5\}$

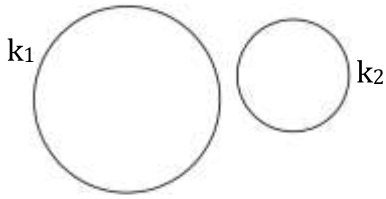
8. Ispitajte što sve može biti presjek dvije kružnice u ravnini.

Rješenje.

1. slučaj



Slika 1

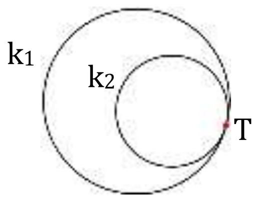


Slika 2

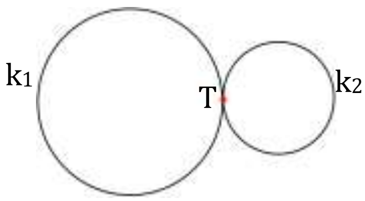
U 1. slučaju (*Slika 1, Slika 2*) dvije kružnice nemaju zajedničkih točaka.

Presjek je prazan skup. $k_1 \cap k_2 = \emptyset$.

2. slučaj



Slika 3

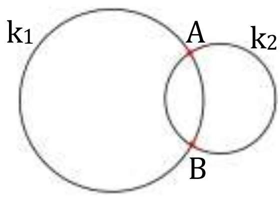


Slika 4

U 2. slučaju (*Slika 3, Slika 4*) dvije kružnice se sijeku (dodiruju) u jednoj točki.

$k_1 \cap k_2 = \{T\}$.

3. slučaj



Slika 5

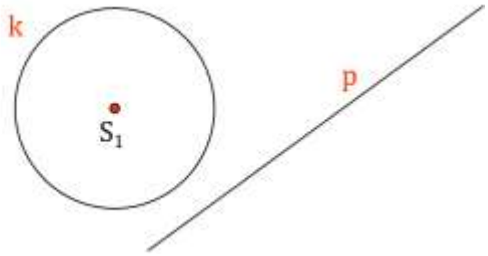
U 3. slučaju (*Slika 5*) dvije kružnice se sijeku u dvije točke. $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$.

9. Istražite što sve može biti presjek pravca i kružnice u ravnini.

Rješenje.

1. slučaj

Pravac i kružnica nemaju zajedničkih točaka (*Slika 6*).



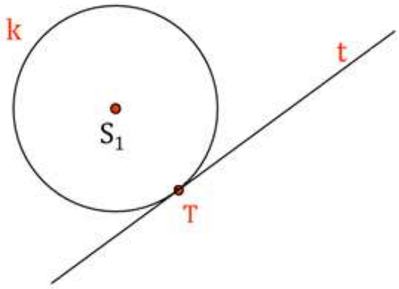
Slika 6

Presjek pravca i kružnice je prazan skup.

$k \cap p = \emptyset$

2. slučaj

Pravac i kružnica imaju jednu zajedničku točku *(Slika 7)*.



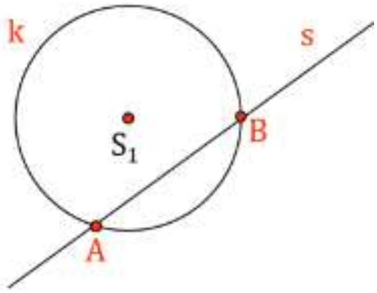
Slika 7

Presjek kružnice i pravca je točka. $k \cap t = \{T\}$.

Pravac koji dira kružnicu u jednoj točki zove se tangenta. Točka dodira pravca i kružnice zove se dirалište.

3. slučaj

Pravac i kružnica imaju dvije zajedničke točke (*Slika 8*).



Slika 8

Presjek pravca i kružnice su točke A i B. $k \cap s = \{A,\ B\}$.

10. Za dane skupove odredite razliku (diferenciju) $A \backslash B$.

a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$

b) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$

c) $A = \{x: 3 < x < 9, x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{x: x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$

Rješenje.

$$A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$

a) $A \backslash B = \{1\}$

b) $A \backslash B = \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$

c) $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A \backslash B = \{6, 7, 8\}$

11. Za dane skupove odredite razliku (diferenciju) $B \backslash A$.

a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$

b) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$

c) $A = \{x: 3 < x < 9, x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{x: x \leq 5, x \in \mathbb{N}\}$

Rješenje.

$$B \backslash A = \{x: x \in B \wedge x \notin A\}$$

a) $B \backslash A = \{2, 9, 11\}$

b) $B \backslash A = \{2, 4, 6, 8\} = B$

c) $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B \backslash A = \{1, 2, 3\}$

12. Za dane skupove

$$A = \left\{x: 2 < x < \frac{37}{5} \wedge x \in \mathbb{N}\right\}$$
$$B = \{x: -2 \leq x - 6 < 3, x \in \mathbb{Z}\}$$
$$C = \{x: -1 < x < 14, x \in \mathbb{Z}, x \text{ je djeljiv s } 3\}$$

odredite:

a) $A \cup B$ b) $A \cap C$ c) $(A \backslash B) \cup C$ d) $(A \cup C) \backslash B$.

Rješenje.

$$A = \left\{x: 2 < x < \frac{37}{5} \wedge x \in \mathbb{N}\right\} = \{x: 2 < x < 7{,}4 \wedge x \in \mathbb{N}\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{x: -2 \leq x - 6 < 3, x \in \mathbb{Z}\} = \{x: -2 + 6 \leq x - 6 + 6 < 3 + 6, x \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{x: 4 \leq x < 9, x \in \mathbb{Z}\} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$C = \{x: -1 < x < 14, x \in \mathbb{Z}, x \text{ je djeljiv s } 3\} = \{0, 3, 6, 9, 12\}$$

a) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $A \cap C = \{3, 6\}$

c) $(A \backslash B) \cup C = \{3\} \cup \{0, 3, 6, 9, 12\} = \{0, 3, 6, 9, 12\} = C$

d) $(A \cup C) \backslash B = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12\} \backslash \{4, 5, 6, 7, 8\} = \{0, 3, 9, 12\}$

13. Odredite elemente skupova A, B, C i D ako je

$A = \{x: -19 \leq x < 29, x \text{ je djeljiv s } 3, x \in \mathbb{N}\}$,

$B = \{x: 7 < x < 29, x \text{ je neparan broj}\}$,

$C = \{x: 10 \leq x \leq 29, x \text{ je prost broj}\}$ i

$D = (C \backslash B) \cup (A \cap B)$.

Rješenje.

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$

$B = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27\}$

$C = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

$C \backslash B = \{29\}$

$A \cap B = \{9, 15, 21, 27\}$

$D = (C \backslash B) \cup (A \cap B) = \{29\} \cup \{9, 15, 21, 27\} = \{9, 15, 21, 27, 29\}$

14. (zadatak za vježbu) Odredite elemente skupova A, B, C i D ako je

$A = \left\{x: \frac{105}{15} \leq x < 42, x \text{ je djeljiv sa } 6\right\}$,

$B = \left\{x: 15 < x < \frac{69}{2} \wedge x \text{ je višekratnik broja } 3\right\}$,

$C = A \cup B$ i

$D = C \backslash (A \cap B)$.

Rješenje.

$A = \{x: 7 \leq x < 42, x \text{ je djeljiv sa } 6\} = \{12, 18, 24, 30, 36\}$

$B = \{x: 15 < x < 34{,}5 \wedge x \text{ je višekratnik broja } 3\} = \{18, 21, 24, 27, 30, 33\}$

$C = A \cup B = \{12, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\}$

$D = C \backslash (A \cap B) = \{12, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\} \backslash \{18, 24, 30\} = \{12, 21, 27, 33, 36\}$

15. Nađite Kartezijev produkt $A \times B$ ako je:

a) $A = \{1, 3\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$

b) $A = \{-1, 2, 4\}$
$B = \{3, 5\}$

c) $A = \emptyset$
$B = \{3, 4\}$

Rješenje.

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$$

a) $A \times B = \{1, 3\} \times \{2, 3, 5, 7, 9\}$
$= \{(1,2), (1,3), (1,5), (1,7), (1,9), (3,2), (3,3), (3,5), (3,7), (3,9)\}$

b) $A \times B \quad = \{-1, 2, 4\} \times \{3, 5\} = \{(-1,3), (-1,5), (2,3), (2,5), (4,3), (4,5)\}$
c) $A \times B \quad = \emptyset$

16. Zadani su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{x, y\}$.
Odredite Kartezijeve produkte $A \times B$ i $B \times A$. Vrijedi li $A \times B = B \times A$?

Rješenje.

$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$

$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$

$A \times B \neq B \times A$

17. Zadani su skupovi $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$ i $C = \{c\}$. Odredite $A \times B \times C$.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
A \times B \times C &= \{a, b\} \times \{x, y\} \times \{c\} \\
&= \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\} \times \{c\} \\
&= \{(a, x, c), (a, y, c), (b, x, c), (b, y, c)\}
\end{aligned}
$$

18. Nađite Kartezijev kvadrat $A \times A = A^2$ skupa $A = \{1, 3, 5\}$.

Rješenje.

$A \times A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

19. (zadatak za vježbu) Ako je $A = \{0, 1\}$, odredite $A \times A$ i $A \times A \times A$.

Rješenje.

$A \times A = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

$$
\begin{aligned}
A \times A \times A &= \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \\
&= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \times \{0, 1\} \\
&= \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}
\end{aligned}
$$

20. (zadatak za vježbu) Pokažite na primjeru skupova $A = \{2, 3\}$ i $B = \{a, b, c\}$ da za Kartezijev produkt skupova ne vrijedi zakon komutacije ($A \times B = B \times A$).

Rješenje.

$A \times B = \{(2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$

$B \times A = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)\}$

$A \times B \neq B \times A$

21. Na primjeru skupova $A = \{3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$ i $C = \{a, b, c\}$ ispitajte vrijedi li jednakost $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Rješenje.

$(A \cup B) \times C = \{3,4, x, y, z\} \times \{a, b, c\} =$

$= \{(3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c), (x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c), (z, a), (z, b), (z, c)\}$

$(A \times C) \cup (B \times C) =$

$= \{(3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\} \cup \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c), (z, a), (z, b), (z, c)\}$

$= \{(3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c), (x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c), (z, a), (z, b), (z, c)\}$

Vrijedi jednakost, tj. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

22. (zadatak za vježbu) Elementi skupa A su svi cijeli brojevi djeljivi s 3 koji nisu veći od 21 niti su manji od 6. Odredite $A \cap B$ ako je $B = \{x : 2x + 3 < 20,\ x \in \mathbb{N}\}$.

Rješenje.

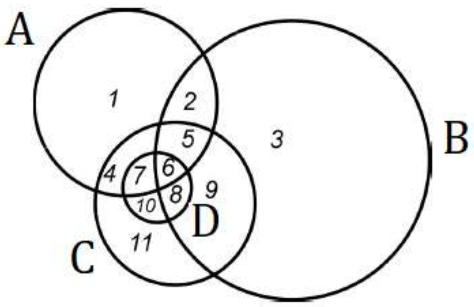
$A = \{x: 6 \leq x \leq 21, x \text{ je djeljiv s } 3, x \in \mathbb{Z}\} = \{6, 9, 12, 15, 18, 21\}$

$B = \{x: 2x + 3 < 20, x \in \mathbb{N}\}$

$2x + 3 < 20 \land x \in \mathbb{N}$
$2x < 17 \land x \in \mathbb{N}$
$x < 8{,}5 \land x \in \mathbb{N}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$A \cap B = \{6\}$

23. Odredite elemente skupova A, B, C i D koji su prikazani na slici, a potom elemente skupa:

a) $A \cup B$
b) $B \cap D$
c) $A \cup B \cup D$
d) $(A \cup B) \setminus C$
e) $\big((A \cup B) \setminus C\big) \cup D$
f) $\big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup (D \setminus B)$.



Rješenje.

$A = \{1,2,4,5,6,7\}, B = \{2,3,5,6,8,9\}, C = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$ i $D = \{6,7,8,10\}$

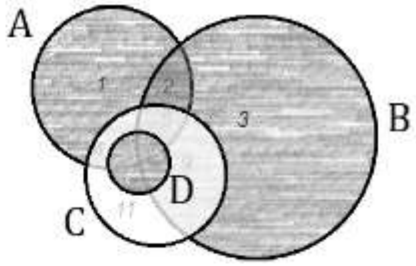
a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

b) $B \cap D = \{6, 8\}$

c) $A \cup B \cup D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

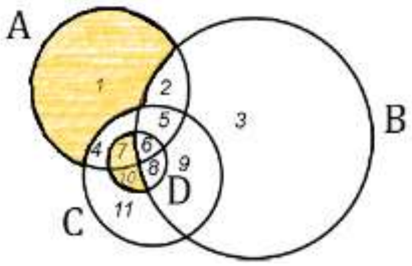
d) $(A \cup B) \setminus C = \{1,2,3\}$

e) $\big((A \cup B)\setminus C\big) \cup D = \{1,2,3,6,7,8,10\}$



$\big((A \cup B)\setminus C\big) \cup D$

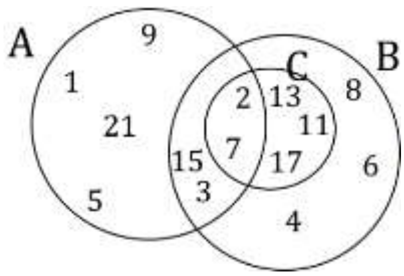
f) $\big(A\setminus(B \cup C)\big) \cup (D\setminus B) = \{1,7,10\}$



$\big(A\setminus(B \cup C)\big) \cup (D\setminus B)$

24. Na slici su prikazani skupovi A, B i C.
Odredite elemente skupa:

a) $(A \cap B) \cap C$
b) $(A \cup B)\setminus C$
c) $(B \cap C) \times (C\setminus A)$.



Rješenje.

a) $(A \cap B) \cap C = \{2,3,7,15\} \cap \{2,7,11,13,17\} = \{2,7\}$

b) $(A \cup B)\setminus C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,15,17,21\}\setminus\{2,7,11,13,17\} = \{1,3,4,5,6,8,9,15,21\}$

c) $(B \cap C) \times (C\setminus A) = \{2,7,11,13,17\} \times \{11,13,17\} =$

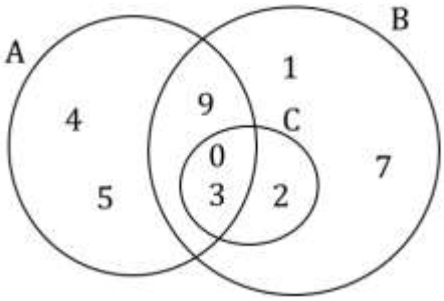
$= \{(2,11),(2,13),(2,17),(7,11),(7,13),(7,17),(11,11),(11,13),(11,17),(13,11),$

$(13,13),(13,17),(17,11),(17,13),(17,17)\}$

25. Odredite elemente skupova A, B i C ako je poznato

$C \subseteq B$,
$A \cap B = \{0,3,9\}$,
$B \cap C = \{0,2,3\}$,
$A \cap B \cap C = \{0,3\}$,
$A\setminus B = \{4,5\}$,
$B\setminus A = \{1,2,7\}$,
$A\setminus C = \{4,5,9\}$ i
$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,7,9\}$.

Rješenje.



$A = \{0, 3, 4, 5, 9\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 7, 9\}$

$C = \{0, 2, 3\}$

26. Pomoću Vennovih dijagrama na istoj slici prikažite skup svih prirodnih brojeva manjih od 10000, skup svih prirodnih brojeva manjih od 1000, skup svih prirodnih brojeva manjih od 100 i skup svih prirodnih brojeva manjih od 10.

Odredite koliko ima:

a) jednoznamenkastih brojeva
b) dvoznamenkastih brojeva
c) troznamenkastih brojeva
d) četveroznamenkastih brojeva.

Rješenje.

Skup prirodnih brojeva manjih od 10 označimo s A.

$A = \{x: x < 10 \wedge x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Skup prirodnih brojeva manjih od 100 označimo s B.

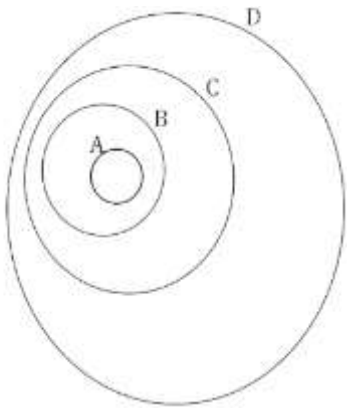
$B = \{x: x < 100 \wedge x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$

Skup prirodnih brojeva manjih od 1000 označimo s C.

$C = \{x: x < 1000 \wedge x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, \dots, 998, 999\}$

Skup prirodnih brojeva manjih od 10000 označimo s D.

$D = \{x: x < 10000 \wedge x \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, \dots, 9998, 9999\}$



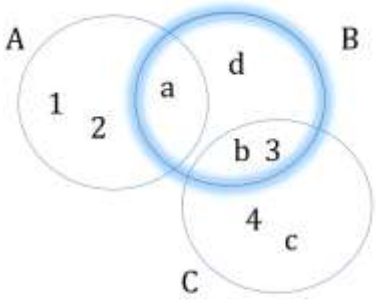
$A \subset B \subset C \subset D$

a) $k(A) = 9$. Jednoznamenkastih brojeva ima 9.
b) Dvoznamenkastih brojeva ima $k(B \setminus A) = k(B) - k(A) = 99 - 9 = 90$.
c) Troznamenkastih brojeva ima $k(C \setminus B) = k(C) - k(B) = 999 - 99 = 900$.
d) Četveroznamenkastih brojeva ima $k(D \setminus C) = k(D) - k(C) = 9999 - 999 = 9000$.

27. Odredite elemente skupa B ako je $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4\}$, $A \backslash B = \{1, 2\}$, $A \cap C = \emptyset$, $C \backslash B = \{c, 4\}$, $A \cap B = \{a\}$ i $B \cap C = \{b, 3\}$.

Rješenje.

$B = \{a, b, d, 3\}$

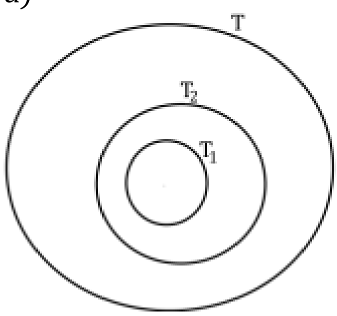


28. (zadatak za vježbu) Pomoću Vennovih dijagrama prikažite i usporedite sljedeće skupove.

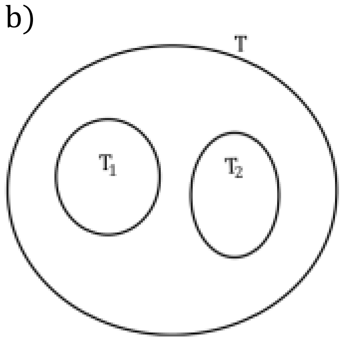
a) T − skup svih trokuta, T_1 − skup svih jednakostraničnih trokuta i T_2 − skup svih jednakokračnih trokuta.
b) T − skup svih trokuta, T_1 − skup svih jednakostraničnih trokuta i T_2 − skup svih pravokutnih trokuta.
c) T − skup svih trokuta, T_1 − skup svih jednakostraničnih trokuta, T_2 − skup svih pravokutnih trokuta i T_3 − skup svih jednakokračnih trokuta.

Rješenje.

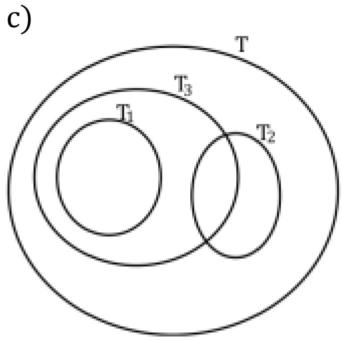
a)



b)



c)



29. U skupini od 70 studenata provedena je anketa o vrsti rekreacije kojom se bave. Bicikl vozi 34 studenta, 30 ih trči, a 17 studenata ne trči i ne vozi bicikl.

Koliko studenata

a) samo trči
b) samo vozi bicikl
c) se bavi bar jednom aktivnosti
d) vozi bicikl i trči?

Rješenje.

$\mathcal{U}$ − skup svih studenata (univerzalni skup)

B − skup studenata koji voze bicikl

T − skup studenata koji trče

$(B \cup T)^C$ − skup studenata koji ne trče i ne voze bicikl

Poznato je $k(\mathcal{U}) = 70, k(B) = 34, k(T) = 30$ i $k((B \cup T)^c) = 17$.

c) $k(B \cup T) = k(\mathcal{U}) - k((B \cup T)^C) = 70 - 17 = 53$

Bar jednom aktivnosti se bavi 53 studenta.

a) $k(T \setminus B) = k(B \cup T) - k(B) = 53 - 34 = 19$

Samo trči njih 19.

b) $k(B \setminus T) = k(B \cup T) - k(T) = 53 - 30 = 23$

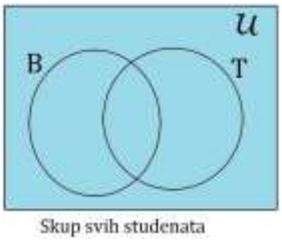
Samo vozi bicikl njih 23.

d) $k(B \cap T) = k(B \cup T) - k(T \setminus B) - k(B \setminus T) = 53 - 19 - 23 = 11$

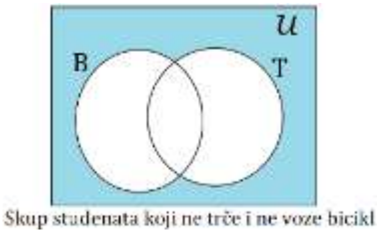
Koristeći formulu uključivanja i isključivanja $k(B \cup T) = k(B) + k(T) - k(B \cap T)$, možemo računati i ovako

$k(B \cap T) = k(B) + k(T) - k(B \cup T) = 34 + 30 - 53 = 11$

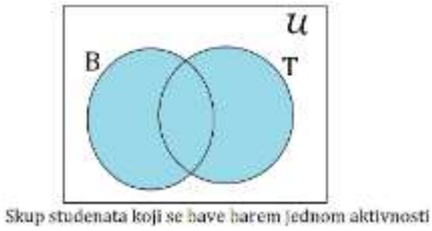
11 studenata vozi bicikl i trči.



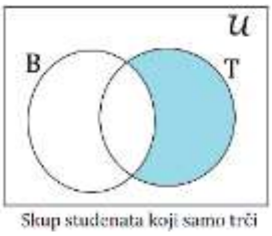
$\mathcal{U}$



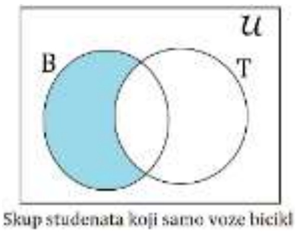
$(B \cup T)^c$



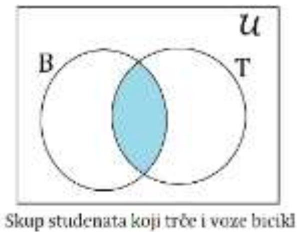
$B \cup T$



$T \setminus B$



$B \setminus T$



$B \cap T$

30. Od 600 učenika neke škole, engleski jezik uči 208 učenika, mađarski 330, a talijanski jezik 182 učenika. Po dva jezika, engleski i mađarski uči 80 učenika, engleski i talijanski 59, mađarski i talijanski 68 učenika, a 30 učenika uče sva tri jezika. Koliko učenika uči samo po jedan jezik, a koliko niti jedan?

Rješenje.

$\mathcal{U}$ – skup svih učenika u školi (univerzalni skup)

E – skup učenika koji uče engleski jezik

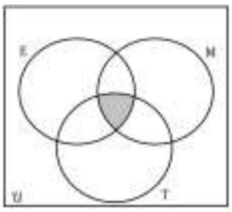
M – skup učenika koji uče mađarski jezik

T – skup učenika koji uče talijanski jezik

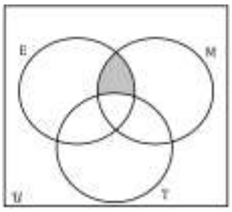
Poznato je $k(\mathcal{U}) = 600, k(E) = 208, k(M) = 330, k(T) = 182,$

$k(E \cap M) = 80, k(E \cap T) = 59, k(M \cap T) = 68,$

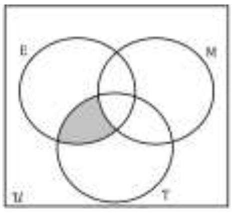
$k(E \cap M \cap T) = 30.$



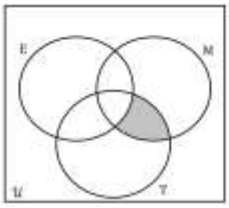
$k(E \cap M \cap T) = 30$



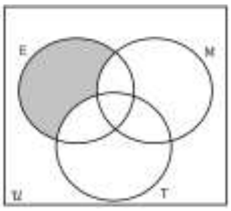
$k(E \cap M) - k(E \cap M \cap T) =$
$= 80 - 30 = 50$



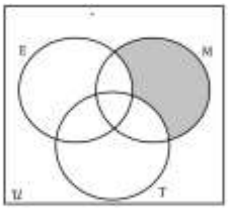
$k(E \cap T) - k(E \cap M \cap T) =$
$= 59 - 30 = 29$



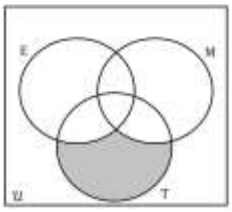
$k(M \cap T) - k(E \cap M \cap T) =$
$= 68 - 30 = 38$



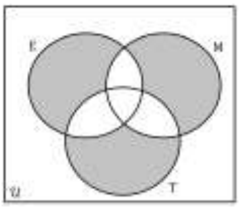
Samo engleski uči 99 učenika.
$208 - 30 - 50 - 29 = 99$



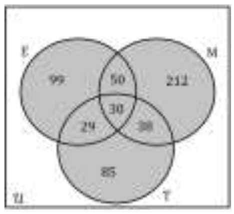
Samo mađarski uči 212 učenika.
$330 - 30 - 50 - 38 = 212$



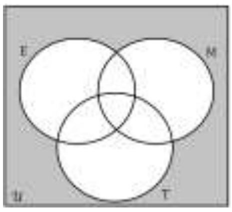
Samo talijanski uči 85 učenika.
$182 - 30 - 29 - 38 = 85$



Samo po jedan jezik uči 396 učenika.
$99 + 212 + 85 = 396$



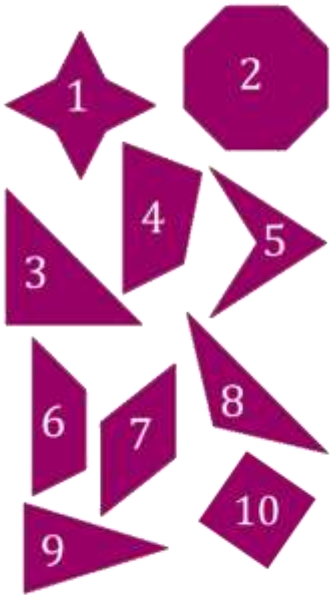
Barem jedan jezik uči 543 učenika.
99+212+85+29+50+38+30=543



57 učenika ne uči niti jedan jezik.
$600 - 543 = 57$

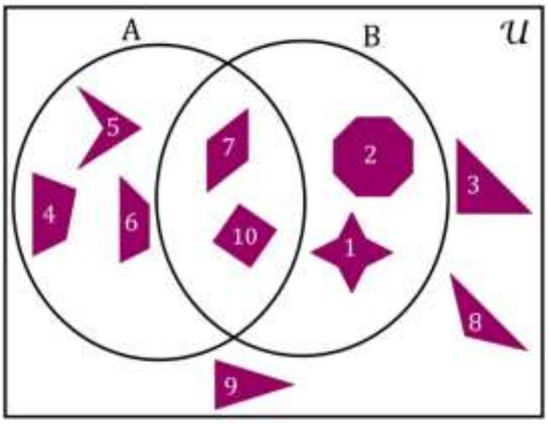
Samo po jedan jezik uči 396 učenika. 57 učenika ne uči niti jedan od ta tri jezika.

31. Na slici su prikazani neki geometrijski likovi. Svaki lik je označen brojem. Pomoću Vennovih dijagrama razvrstajte sve geometrijske likove sa slike s obzirom na skupove A i B. Skup A čine geometrijski likovi sa slike s točno četiri kuta, a skup B geometrijski likovi sa slike koji imaju sve stranice jednake duljine. Kako zovemo likove sa slike koji pripadaju skupu A ∩ B?
Kako zovemo likove sa slike koji pripadaju skupu $(A \cup B)^c$?



Rješenje.

$\mathcal{U}$ – skup svih likova sa slike



Skupu A ∩ B pripada romb s oznakom 7 i kvadrat s oznakom 10.

Skupu $(A \cup B)^c$ pripadaju trokuti s oznakama 3, 8 i 9.

Sva tri trokuta su jednakokračna. Trokut označen s brojem 3 je pravokutan. Trokut s oznakom 8 je tupokutan. Trokut označen brojem 9 je šiljastokutan trokut.

III. RELACIJE I FUNKCIJE

ZADATCI

1. Dani su skupovi $A = \{a: 2 \leq a < 9, a \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b: 9 < b \leq 18, b \in \mathbb{N}\}$. Ispišite sve elemente relacije $\rho \subset A \times B$ koja je definirana na sljedeći način:
   a) $\rho = \left\{(a, b): a = \frac{1}{2} \cdot b - 2\right\}$
   b) $\rho = \{(a, b): b = a^2\}$
   c) $\rho = \{(a, b): b = 2^a + 1\}$
   d) $\rho = \{(a, b) : a + b > 24\}$.

Rješenje.

$A = \{a: 2 \leq a < 9, a \in \mathbb{N}\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{b: 9 < b \leq 18, b \in \mathbb{N}\} = \{10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$

a)

$$a = \frac{1}{2} \cdot b - 2 \Leftrightarrow a + 2 = \frac{1}{2} \cdot b \Leftrightarrow b = 2 \cdot (a + 2)$$

Elementi relacije ρ su uređeni parovi $(a, b) \in A \times B$ za koje vrijedi $a = \frac{1}{2} \cdot b - 2$, odnosno za koje vrijedi $b = 2 \cdot (a + 2)$.

Za svaki $a \in A$ izračunamo b te provjerimo je li $(a, b) \in A \times B$.

a	2	3	4	5
$b = 2 \cdot (a + 2)$	$2 \cdot (2 + 2) = 8$	$2 \cdot (3 + 2) = 10$	$2 \cdot (4 + 2) = 12$	$2 \cdot (5 + 2) = 14$
	$8 \notin B$ pa $(2,\ 8) \notin A \times B$	$10 \in B$ pa $(3,\ 10) \in A \times B$	$12 \in B$ pa $(4,\ 12) \in A \times B$	$14 \in B$ pa $(5,\ 14) \in A \times B$

a	6	7	8
$b = 2 \cdot (a + 2)$	$2 \cdot (6 + 2) = 16$	$2 \cdot (7 + 2) = 18$	$2 \cdot (8 + 2) = 20$
	$16 \in B$ pa $(6,\ 16) \in A \times B$	$18 \in B$ pa $(7,\ 18) \in A \times B$	$20 \notin B$ pa $(8,\ 20) \notin A \times B$

Elementi relacije ρ su uređeni parovi $(3,10), (4,12), (5,14), (6,16)$ i $(7,18)$.

$\rho = \{(3,10),\ (4,12), (5,14), (6,16), (7,18)\}$.

b) Elementi relacije ρ su uređeni parovi $(a, b) \in A \times B$ za koje vrijedi $b = a^2$.

Za svaki $a \in A$ izračunamo b te provjerimo je li $(a, b) \in A \times B$.

a	2	3	4	5	6	7	8
$b = a^2$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$
	$4 \notin B$ pa $(2,4) \notin A \times B$	$9 \notin B$ pa $(3,9) \notin A \times B$	$16 \in B$ pa $(4,16) \in A \times B$	$25 \notin B$ pa $(5,25) \notin A \times B$	$36 \notin B$ pa $(6,36) \notin A \times B$	$49 \notin B$ pa $(7,49) \notin A \times B$	$64 \notin B$ pa $(8,64) \notin A \times B$

Element relacije ρ je uređeni par $(4,16)$.

$\rho = \{(4,16)\}$.

c) Elementi relacije ρ su uređeni parovi $(a,b) \in A \times B$ za koje vrijedi $b = 2^a + 1$.
Za svaki $a \in A$ izračunamo b te provjerimo je li $(a,b) \in A \times B$.

a	2	3	4	5	6	7	8
$b = 2^a + 1$	$2^2+1= 5$	$2^3 + 1= 9$	$2^4 + 1= 17$	$2^5 + 1= 33$	$2^6 + 1= 65$	129	257
	$5 \notin B$ pa $(2,5) \notin A \times B$	$9 \notin B$ pa $(3, 9) \notin A \times B$	$17 \in B$ pa $(4,17) \in A \times B$	$33 \notin B$ pa $(5,33) \notin A \times B$	$65 \notin B$ pa $(6,65) \notin A \times B$	$129 \notin B$ pa $(7,129) \notin A \times B$	$257 \notin B$ $(8,257) \notin A \times B$

Element relacije ρ je uređeni par $(4,17)$.

$\rho = \{(4,17)\}$

d) Elementi relacije ρ su uređeni parovi $(a,b) \in A \times B$ za koje vrijedi $a + b > 24$.
Elementi relacije ρ su uređeni parovi $(7,18)$, $(8,17)$ i $(8,18)$ jer jedino za te uređene parove vrijedi $a + b > 24$.
$7 + 18 = 25 > 24$, $8 + 17 = 25 > 24$ i $8 + 18 = 26 > 24$.
$\rho = \{(7,18), (8,17), (8,18)\}$.

2. Dan je skup $A = \{a: a < 20, a \in \mathbb{N}\}$. Ispišite sve elemente relacije $\rho \subset A^2$ koja je definirana na sljedeći način:

   a) $(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a \cdot b = 12$

   b) $(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a = 4b + 4$

Rješenje.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$

Skup $A \times A$ ima $k(A \times A) = k(A) \cdot k(A) = 19 \cdot 19 = 361$ elemenata. Potrebno je među njima pronaći one koji ispunjavaju uvjete zadatka.

a) Provjerimo za koje elemente skupa A^2 vrijedi jednakost $a \cdot b = 12$.

Za uređene parove $(1,12), (12,1), (2,6), (6,2), (3,4), (4,3)$ vrijedi $a \cdot b = 12$ pa pišemo

$\rho = \{(1,12), (12,1), (2,6), (6,2), (3,4), (4,3)\}$.

b) Provjerimo za koje elemente skupa A^2 vrijedi jednakost $a = 4b + 4$.

Za uređene parove $(8,1), (12,2), (16,3)$ vrijedi $a = 4b + 4$ pa pišemo

$\rho = \{(8,1), (12,2), (16,3)\}$.

3. Neka je $S = \{4, 6, 8\}$ i neka je dana relacija $\rho \subseteq S^2$, $\rho=\{(4, 8),(8, 6),(4, 4),(6, 8),(8, 4)\}$.

   a) Ispitajte refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Je li dana relacija ρ relacija ekvivalencije? Odgovore obrazložite.

   b) Relaciju ρ nadopunite najmanjim brojem elemenata tako da dobijete relaciju $\rho_1 \subseteq S^2$ koja je refleksivna.

Rješenje.

$$S^2 = S \times S = \{4, 6, 8\} \times \{4, 6, 8\}$$
$$= \{(4, 4), (4, 6), (4, 8), (6, 4), (6, 6), (6, 8), (8, 4), (8, 6), (8, 8)\}$$

a)

Refleksivnost.

$(x, x) \in \rho, \forall x \in S$

$6 \in S$, ali $(6, 6) \notin \rho$ pa ρ nije refleksivna relacija.

Simetričnost.

$(x, y) \in \rho \Longrightarrow (y, x) \in \rho$

$(4, 8) \in \rho \Longrightarrow (8, 4) \in \rho$

$(8, 4) \in \rho \Longrightarrow (4, 8) \in \rho$

$(8, 6) \in \rho \Longrightarrow (6, 8) \in \rho$

$(6, 8) \in \rho \Longrightarrow (8, 6) \in \rho$

ρ je simetrična relacija.

Tranzitivnost.

$(x, y) \in \rho \land (y, z) \in \rho \Longrightarrow (x, z) \in \rho$

Npr. $(4,8) \in \rho \land (8,6) \in \rho$, ali $(4,6) \notin \rho$ pa zaključujemo da ρ nije tranzitivna relacija.

ρ nije refleksivna relacija, ρ je simetrična relacija i ρ nije tranzitivna relacija.

Relacija ρ nije relacija ekvivalencije jer ne vrijede sva tri svojstva.

b) $\rho_1 = \{(4, 8), (8, 6), (4, 4), (6, 8), (8, 4), \mathbf{(6, 6), (8, 8)}\}$.

Za $4 \in S$ je $(4, 4) \in \rho_1$. Za $6 \in S$ je $(6, 6) \in \rho_1$. Za $8 \in S$ je $(8, 8) \in \rho_1$.

Pokazali smo da vrijedi $(x, x) \in \rho_1, \forall x \in S$.

Relacija ρ_1 je refleksivna relacija.

4. Neka je $S=\{4, 6, 8\}$ i neka je dana relacija $\rho \subseteq S^2$,

$$\rho=\{(8, 8),(4, 8),(8, 6),(4, 6),(6, 8),(6, 6)\}.$$

a) Ispitajte refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Je li dana relacija ρ relacija ekvivalencije? Odgovore obrazložite.

b) Relaciju ρ nadopunite najmanjim brojem elemenata tako da dobijete relaciju $\rho_1 \subseteq S^2$ koja je simetrična.

Rješenje.

a)

Refleksivnost.

$(x, x) \in \rho, \forall x \in S$

Npr. $4 \in S$, ali $(4, 4) \notin \rho$ pa ρ nije refleksivna relacija.

Simetričnost.

$(x, y) \in \rho \Longrightarrow (y, x) \in \rho$

Npr. $(4, 8) \in \rho$, ali $(8, 4) \notin \rho$ pa ρ nije simetrična relacija.

Tranzitivnost.

$(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Longrightarrow (x, z) \in \rho$

$(8, 8) \in \rho \wedge (8, 6) \in \rho \Longrightarrow (8, 6) \in \rho$

$(4, 8) \in \rho \wedge (8, 8) \in \rho \Longrightarrow (4, 8) \in \rho$

$(4, 8) \in \rho \wedge (8, 6) \in \rho \Longrightarrow (4, 6) \in \rho$

$(8, 6) \in \rho \wedge (6, 8) \in \rho \Longrightarrow (8, 8) \in \rho$

$(6, 6) \in \rho \wedge (6, 8) \in \rho \Longrightarrow (6, 8) \in \rho$

$(8, 6) \in \rho \wedge (6, 6) \in \rho \Longrightarrow (8, 6) \in \rho$

$(4, 6) \in \rho \wedge (6, 8) \in \rho \Longrightarrow (4, 8) \in \rho$

$(4, 6) \in \rho \wedge (6, 6) \in \rho \Longrightarrow (4, 6) \in \rho$

$(6, 8) \in \rho \wedge (8, 8) \in \rho \Longrightarrow (6, 8) \in \rho$

$(6, 8) \in \rho \wedge (8, 6) \in \rho \Longrightarrow (6, 6) \in \rho$

ρ je tranzitivna relacija.

Relacija ρ nije relacija ekvivalencije jer ne vrijede sva tri svojstva (ρ nije refleksivna relacija, ρ nije simetrična relacija i ρ je tranzitivna relacija).

b) ρ_1={(8, 8), (4, 8), (8, 6), (4, 6), (6, 8), (6, 6), **(8, 4), (6, 4)**}.

Relacija ρ_1 je simetrična relacija.

5. Neka je S={4, 6, 8} i neka je dana relacija $\rho \subseteq S^2$, ρ={(6, 8),(8, 8),(8, 6),(4, 4),(6, 6)}. Ispitajte refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Je li ρ relacija ekvivalencije? Odgovore obrazložite.

Rješenje.

Refleksivnost.

$(x, x) \in \rho, \forall x \in S$

Za $4 \in S$ je $(4, 4) \in \rho$. Za $6 \in S$ je $(6, 6) \in \rho$. Za $8 \in S$ je $(8, 8) \in \rho$.

ρ je refleksivna relacija.

Simetričnost.

$(x, y) \in \rho \Longrightarrow (y, x) \in \rho$

$(8, 6) \in \rho \Longrightarrow (6, 8) \in \rho$

$(6, 8) \in \rho \Longrightarrow (8, 6) \in \rho$

ρ je simetrična relacija.

Tranzitivnost.

$(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Longrightarrow (x, z) \in \rho$

$(8,\ 8) \in \rho\ \wedge (8,\ 6) \in \rho \Longrightarrow (8,\ 6) \in \rho$

$(8,\ 6) \in \rho\ \wedge (6,\ 6) \in \rho \Longrightarrow (8,\ 6) \in \rho$

$(8,\ 6) \in \rho\ \wedge (6,\ 8) \in \rho \Longrightarrow (8,\ 8) \in \rho$

$(6,\ 6) \in \rho\ \wedge (6,\ 8) \in \rho \Longrightarrow (6,\ 8) \in \rho$

$(6,\ 8) \in \rho\ \wedge (8,\ 6) \in \rho \Longrightarrow (6,\ 6) \in \rho$

$(6,\ 8) \in \rho\ \wedge (8,\ 8) \in \rho \Longrightarrow (6,\ 8) \in \rho$

ρ je tranzitivna relacija.

Relacija ρ je relacija ekvivalencije jer vrijede sva tri svojstva (ρ je refleksivna relacija, ρ je simetrična relacija i ρ je tranzitivna relacija).

6. (zadatak za vježbu) Neka je S={a, b, c, d, e} i neka je dana relacija $\rho \subseteq S^2$,

$$\rho=\{(a, a), (b, a), (b, e), (c, c), (e, b), (d, e)\}.$$

a) Ispitajte refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Je li dana relacija ρ relacija ekvivalencije? Odgovore obrazložite.

b) Relaciju ρ nadopunite najmanjim brojem elemenata tako da dobijete relaciju $\rho_1 \subseteq S^2$ koja je simetrična.

Rješenje.

a)

Refleksivnost.

$(x, x) \in \rho, \forall x \in S$

Npr. $b \in S$, ali $(b, b) \notin \rho$ pa ρ nije refleksivna relacija.

Simetričnost.

$(x, y) \in \rho \Longrightarrow (y, x) \in \rho$

Npr. $(b, a) \in \rho$, ali $(a, b) \notin \rho$ pa ρ nije simetrična relacija.

Tranzitivnost.

$(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Longrightarrow (x, z) \in \rho$

Npr. $(e, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho$, ali $(e, a) \notin \rho$ pa ρ nije tranzitivna relacija.

ρ nije refleksivna relacija. ρ nije simetrična relacija. ρ nije tranzitivna relacija.

Relacija ρ nije relacija ekvivalencije jer ne vrijede sva tri svojstva

b) $\rho_1=\{(a, a), (b, a), (b, e), (c, c), (e, b), (d, e), \mathbf{(a, b), (e, d)}\}$.
Relacija ρ_1 je simetrična relacija.

7. Neka je na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dana relacija $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(x, y): x + y = 6\}$.
Ispišite sve elemente relacije ρ. Ispitajte je li ρ relacija ekvivalencije? Odgovore obrazložite.

Rješenje.

$A^2 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} =$
$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3),$

$(3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$

$\rho = \{(x, y) : x + y = 6\} = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\} \subseteq A^2$

Refleksivnost.

$(x, x) \in \rho, \forall x \in A$

Npr. $1 \in A$, ali $(1, 1) \notin \rho$ jer $1 + 1 = 2 \neq 6$ pa ρ nije refleksivna relacija.

Simetričnost.

$(x, y) \in \rho \Longrightarrow (y, x) \in \rho$

$(1, 5) \in \rho \Longrightarrow (5, 1) \in \rho$

$(5, 1) \in \rho \Longrightarrow (1, 5) \in \rho$

$(2, 4) \in \rho \Longrightarrow (4, 2) \in \rho$

$(4, 2) \in \rho \Longrightarrow (2, 4) \in \rho$

$(3, 3) \in \rho \Longrightarrow (3, 3) \in \rho$

ρ je simetrična relacija.

Tranzitivnost.

$(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Longrightarrow (x, z) \in \rho$

Npr. $(1, 5) \in \rho \ \wedge (5, 1) \in \rho$, ali $(1, 1) \notin \rho$ pa ρ nije tranzitivna relacija.

Relacija ρ nije relacija ekvivalencije jer ne vrijede sva tri svojstva (ρ nije refleksivna relacija, ρ je simetrična relacija i ρ nije tranzitivna relacija).

8. Prikažite grafički relaciju:
   a) $\rho \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (a, b) \in \rho \Leftrightarrow b = 2a + 1$
   b) $\rho \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (a, b) \in \rho \Leftrightarrow b = 2a + 1$
   c) $\rho \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (a, b) \in \rho \Leftrightarrow b = a^2$
   d) $\rho \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (a, b) \in \rho \Leftrightarrow b = a^2$.

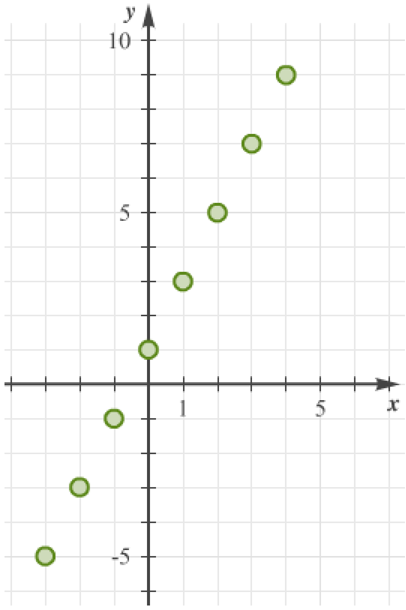
Rješenje.

a) Istražimo neke elemente skupa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ za koje vrijedi $b = 2a + 1$.

a	-3	-2	-1	0
$b = 2 \cdot a + 1$	$2 \cdot (-3) + 1 = -5$	$2 \cdot (-2) + 1 = -3$	$2 \cdot (-1) + 1 = -1$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
	$(-3, -5) \in \rho$	$(-2, -3) \in \rho$	$(-1, -1) \in \rho$	$(0, 1) \in \rho$

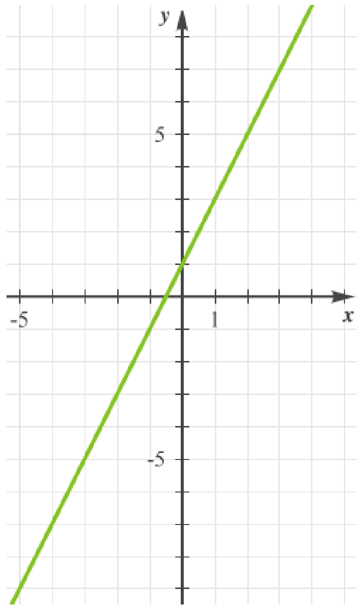
a	1	2	3	4
$b = 2 \cdot a + 1$	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	$2 \cdot 4 + 1 = 9$
	$(1, 3) \in \rho$	$(2, 5) \in \rho$	$(3, 7) \in \rho$	$(4, 9) \in \rho$

Grafički prikažimo neke elemente relacije ρ.



b) Elementi relacije ρ su sve točke koje pripadaju pravcu $y = 2x + 1$.

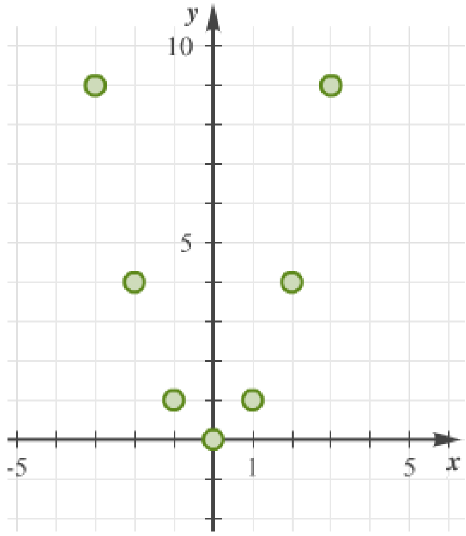
Grafički prikažimo relaciju ρ.



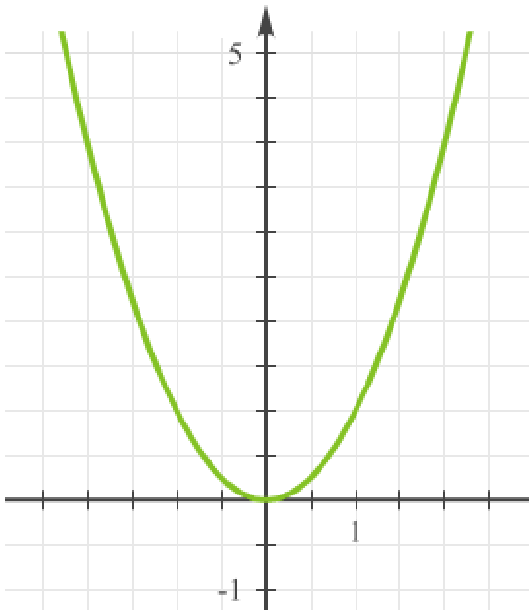
c) Istražimo neke elemente skupa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ za koje vrijedi $b = a^2$.

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$b = a^2$	$(-3)^2 = 9$	$(-2)^2 = 4$	$(-1)^2 = 1$	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$

Grafički prikažimo neke elemente relacije ρ.



d) Elementi relacije ρ su sve točke koje pripadaju paraboli $y = x^2$.
Grafički prikažimo relaciju ρ.



9. (zadatak za vježbu) Dani su skupovi

$$A = \{x: -5 < x \leq 8, x \in \mathbb{N}\} \text{ i } B = \{y: -8 \leq y < 5, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Ispišite sve elemente relacije $\rho \subseteq A \times B$, $\rho = \{(x,y):\ x^2 = y^2\}$.

Grafički prikažite relaciju ρ.

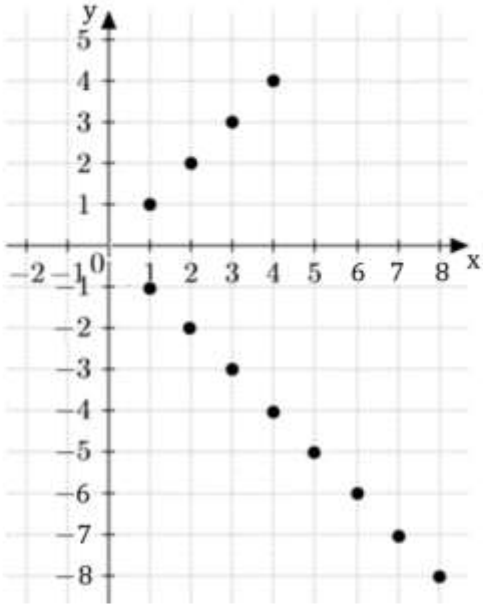
Rješenje.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{-8, -7 - 6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

$\rho = \{(x, y):\ x^2 = y^2\}$

$\rho = \{(1, -1), (1, 1), (2, -2), (2, 2), (3, -3), (3, 3), (4, -4), (4, 4), (5, -5), (6, -6), (7, -7), (8, -8)\}$



10. a) Odredite elemente skupova A, B, C i $D = (C\backslash B) \cup (A \cap B)$ ako je

$$A = \{x: -19 \leq x < 29, x \text{ je djeljiv s } 3, x \in \mathbb{N}\},$$
$$B = \{x: 7 < x < 29, x \text{ je neparan broj}\} \text{ i}$$
$$C = \{x: 10 \leq x \leq 29, x \text{ je prost broj}\}.$$

b)Neka je dana relacija $\rho \subseteq D \times D$,

$$\rho = \{(x, y): \text{barem jedan od brojeva } x \text{ i } y \text{ sadrži znamenku } 9\}$$

pri čemu je D skup iz zadatka pod a).

Ispišite sve elemente relacije ρ te ispitajte refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Odgovore obrazložite.

Rješenje.

a)

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$

$B = \{9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27\}$

$C = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$,

$D = (C\backslash B) \cup (A \cap B) = \{29\} \cup \{9, 15, 21, 27\} = \{9, 15, 21, 27, 29\}$.

b)

$$D \times D = \{(9,9), (9,15), (9,21), (9,27), (9,29), (15,9), (15,15), (15,21), (15,27), (15,29), (21,9), (21,15), (21,21), (21,27), (21,29), (27,9), (27,15), (27,21), (27,27), (27,29), (29,9), (29,15), (29,21), (29,27), (29,29)\}$$

$$\rho = \{(9,9), (9,15), (9,21), (9,27), (9,29), (15,9), (15,29), (21,9), (21,29), (27,9), (27,29), (29,9), (29,15), (29,21), (29,27), (29,29)\}$$

ρ nije refleksivna jer npr. $15 \in D$, ali $(15,15) \notin \rho$.

ρ je simetrična jer vrijedi $(a, b) \in \rho \Longrightarrow (b, a) \in \rho$.

ρ nije tranzitivna jer npr. vrijedi $(15,9) \in \rho \wedge (9,21) \in \rho$, ali $(15,21) \notin \rho$.

11. (zadatak za vježbu) Na skupu $B = \{x: 7 < x + 2 \leq 16, x \text{ je paran broj}\}$ dana je relacija $\rho \subseteq B \times B$,

$$\rho = \{(8,8), (8,10), (8,12), (10,8), (10,10), (10,14), (12,8), (12,10), (14,12)\}.$$

a) Ispitajte refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacije ρ. Odgovore obrazložite.
b) Relaciju ρ nadopunite najmanjim brojem elemenata tako da dobijete relaciju $\rho_1 \subseteq B \times B$ koja je refleksivna i simetrična.

Rješenje.

$B = \{x: 7 < x + 2 \leq 16, x \text{ je paran broj}\} = \{x: 5 < x \leq 14, x \text{ je paran broj}\}$

$B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$.

a) ρ nije refleksivna relacija jer npr. $6 \in B$, ali $(6, 6) \notin \rho$.

ρ nije simetrična relacija jer npr. $(10, 14) \in \rho$, ali $(14, 10) \notin \rho$.

ρ nije tranzitivna relacija jer npr. $(8, 10) \in \rho \wedge (10, 14) \in \rho$, ali $(8, 14) \notin \rho$.

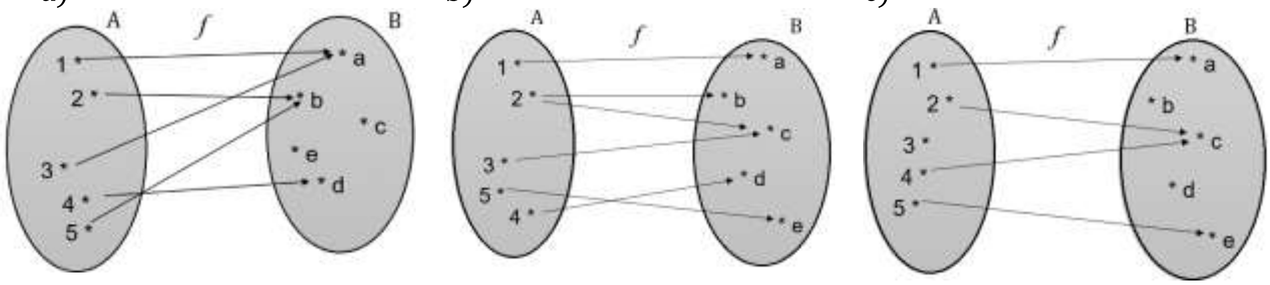
b) $\rho_1 = \{(8,8), (8,10), (8,12), (10,8), (10,10), (10,14), (12,8), (12,10), (14,12),$

$(\mathbf{6}, \mathbf{6}), (\mathbf{12}, \mathbf{12}), (\mathbf{14}, \mathbf{14}), (\mathbf{14}, \mathbf{10}), (\mathbf{10}, \mathbf{12}), (\mathbf{12}, \mathbf{14})\} \subseteq B \times B$

ρ_1 je refleksivna i simetrična.

12. Je li postupak f funkcija?

a) b) c)



Rješenje.

a) DA. Postupak f je funkcija (preslikavanje) s A u B ($f: A \longrightarrow B$) jer svakom elementu skupa A pridružuje točno jedan element skupa B.
b) NE. Npr. elementu 2 su pridružena dva elementa $b \in B$ i $c \in B$, stoga postupak f nije funkcija.
c) NE. Npr. elementu 3 nije pridružen element iz B, stoga postupak f nije funkcija.

13. Ispišite sve elemente slike funkcije $f: A \longrightarrow B$ iz prethodnog zadatka. Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije f.

Rješenje.

Slika funkcije je skup $\mathcal{I}(f) = \{f(x): x \in A\} = \{a, b, d\}$.

Injektivnost funkcije.

Funkcija f nije injekcija jer npr. $2 \neq 5$ i $f(2) = f(5) = b$.

Surjektivnost funkcije.

Funkcija f nije surjekcija jer je slika funkcije f različita od kodomene funkcije f.

$$\mathcal{I}(f) = \{a, b, d\} \neq B = \{a, b, c, d, e\}$$

Bijektivnost funkcije.

Funkcija f nije bijekcija jer f nije injekcija i f nije surjekcija.

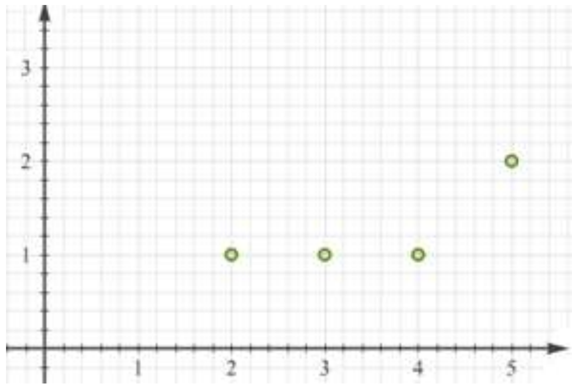
14. Dani su skupovi $D = \{2, 3, 4, 5\}$ i $K = \{1, 2\}$ te funkcija $f: D \to K$ zadana tablicom

x	2	3	4	5
$f(x)$	1	1	1	2

Nacrtajte graf funkcije f.

Rješenje.

Graf funkcije je skup $\Gamma_f = \{(2,\ 1), (3,\ 1), (4,\ 1), (5,\ 2)\}$.



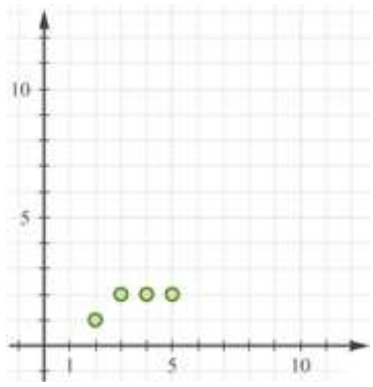
15. (zadatak za vježbu) Dani su skupovi $\mathrm{D} = \{2, 3, 4, 5\}$ i $\mathrm{K} = \{1, 2\}$ te funkcija $f\colon \mathrm{D} \to \mathrm{K}$ zadana tablicom

x	2	3	4	5
$f(\mathrm{x})$	1	2	2	2

Nacrtajte graf funkcije f.

Rješenje.

Graf funkcije je skup $\Gamma_f = \{(2,\ 1), (3,\ 2), (4,\ 2), (5,\ 2)\}$.



16. Dani su skupovi $\mathrm{D} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ i $\mathrm{K} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ te funkcija $f\colon \mathrm{D} \to \mathrm{K}$ zadana tablicom

x	-3	-2	-1	0	1
$f(\mathrm{x})$	5	2	4	5	5

Odredite sliku funkcije f.

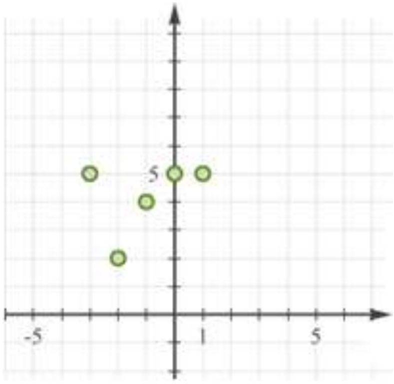
Nacrtajte graf funkcije f.

Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije f.

Rješenje.

Slika funkcije f je skup $\mathcal{I}(f) = \{2,\ 4,\ 5\}$.

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f = \{(-3,\ 5), (-2,\ 2), (-1,\ 4), (0, 5), (1, 5)\}$.



$f(-3) = f(0) = f(1) = 5$, pa slijedi da f nije injektivna.

f nije surjektivna jer slika funkcije nije jednaka kodomeni, $\mathcal{I}(f) = \{2,\ 4,\ 5\} \neq K =$

$= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

f nije injekcija i f nije surjekcija pa slijedi da f nije bijekcija.

17. Dani su skupovi $\mathrm{D} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ i $\mathrm{K} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ te funkcija $f\colon \mathrm{D} \to \mathrm{K}$ zadana tablicom

x	-3	-2	-1	0	1
$f(\mathrm{x})$	5	4	3	2	1

Odredite sliku funkcije f.

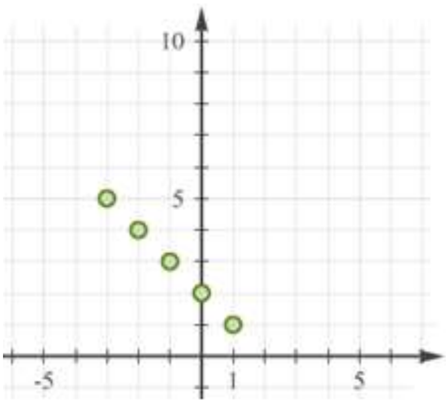
Nacrtajte graf funkcije f.

Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije f.

Rješenje.

Slika funkcije f je skup $\mathcal{I}(f) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f = \{(-3,\ 5),\ (-2,\ 4),\ (-1,\ 3),\ (0,\ 2), (1,\ 1)\}$.



f je injektivna funkcija jer su se različiti elementi domene preslikali u različite elemente kodomene.

f je surjektivna jer je slika funkcije jednaka kodomeni, $\mathcal{I}(f) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} = K$.

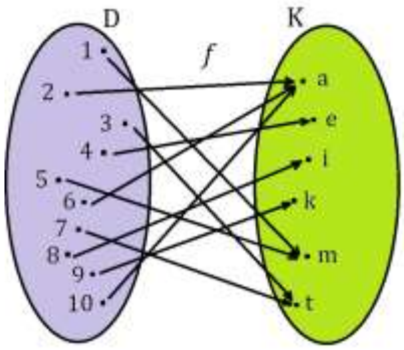
f je bijekcija jer je f injekcija i surjekcija.

18. Dani su skupovi $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ i $K = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{k}, \mathrm{m}, \mathrm{t}\}$ te funkcija $f: D \longrightarrow K$ (vidi sliku).

Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije f.

Odredite sliku funkcije.

Odgovore obrazložite!



Rješenje.

f nije injektivna jer npr. $1 \neq 5$ i $f(1) = f(5) = \mathrm{m}$.

f je surjektivna jer je slika funkcije jednaka kodomeni funkcije,

$$\mathcal{I}(f) = \{\mathrm{m}, \mathrm{a}, \mathrm{t}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{k}\} = K = \{\mathrm{a}, \mathrm{e}, \mathrm{i}, \mathrm{k}, \mathrm{m}, \mathrm{t}\}.$$

f je surjektivna, ali nije injektivna pa slijedi da f nije bijektivna funkcija.

19. Dani su skupovi $A = \{\mathrm{h}, \mathrm{r}, \mathrm{k}, \mathrm{u}, \mathrm{n}, \mathrm{e}\}$ i $B = \{\mathrm{l}, \mathrm{i}, \mathrm{p}, \mathrm{e}\}$ te funkcija $g: A \longrightarrow B$ na sljedeći način

$$g(\mathrm{h}) = \mathrm{p}, g(\mathrm{r}) = \mathrm{i}, g(\mathrm{u}) = \mathrm{l}, g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}, g(\mathrm{k}) = \mathrm{i}, g(\mathrm{n}) = \mathrm{p}.$$

Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije g. Odredite sliku funkcije g. Odgovore obrazložite.

Rješenje.

g nije injektivna funkcija jer npr. $\mathrm{h} \neq \mathrm{n}$ i $g(\mathrm{h}) = g(\mathrm{n}) = \mathrm{p}$.

g je surjektivna funkcija jer je slika funkcije jednaka kodomeni funkcije,

$$\mathcal{I}(g) = \{\mathrm{l}, \mathrm{i}, \mathrm{p}, \mathrm{e}\} = B = \{\mathrm{l}, \mathrm{i}, \mathrm{p}, \mathrm{e}\},$$

tj. u svaki element (svako slovo) iz kodomene se preslikao barem jedan element (slovo) iz domene.

g nije injektivna funkcija pa zaključujemo da g nije bijektivna funkcija.

20. (zadatak za vježbu) Dani su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c, d\}$.

Zadajte funkciju $f: A \to B$.

Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije f.

Odredite sliku funkcije f. Odgovore obrazložite.

21. (zadatak za vježbu) Dani su skupovi $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zadajte funkciju $f: A \to B$ koja

a) je surjektivna

b) nije surjektivna

c) nije injektivna niti surjektivna

d) je bijektivna.

22. (zadatak za vježbu) Dani su skupovi $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i $K = \{a, b, c, d, e\}$.

Zadajte funkciju $f: D \to K$ koja:

a) nije injektivna, ali je surjektivna

b) nije injektivna niti surjektivna.

IV. SKUP PRIRODNIH BROJEVA

ZADATCI

RAČUNANJE U SKUPU $\mathbb{N}$

1. Izračunajte na domišljat način.
   a) $49 + 29 + 87 + 31 + 51 + 13$
   b) $89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89$
   c) $1528 + 356 + 472 + 644$
   d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
   e) $125 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 7$
   f) $20 \cdot 19 + 20 + 19$
   g) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

Rješenje.

a) $49 + 29 + 87 + 31 + 51 + 13 = 100 + 60 + 100 = 260$
b) $89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 + 89 = 7 \cdot 89 = 89 \cdot 7 = 623$
c) $1528 + 356 + 472 + 644 = 2000 + 1000 = 3000$
d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \cdot 10 = 1000$
e) $125 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 7 = 1000 \cdot 100 \cdot 21 = 2100000$
f) $20 \cdot 19 + 20 + 19 = 20 \cdot (19 + 1) + 19 = 20 \cdot 20 + 19 = 400 + 19 = 419$
g) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 4 \cdot 10 + 5 = 45$

2. Izračunajte.
   a) $(2 + 8) \cdot 7 - (15 - 5) \cdot 3$
   b) $2 \cdot 2 - 3 : 3 + 4 \cdot (8 \cdot 2 - 1) - 1000 : (9 \cdot 9 + 19)$
   c) $36 + 64 \cdot 17 - (502 - 352 : 8 + 511)$

Rješenje.

a) $(2 + 8) \cdot 7 - (15 - 5) \cdot 3 = 10 \cdot 7 - 10 \cdot 3 = 10 \cdot (7 - 3) = 10 \cdot 4 = 40$
b) $2 \cdot 2 - 3 : 3 + 4 \cdot (8 \cdot 2 - 1) - 1000 : (9 \cdot 9 + 19) =$
$= 4 - 1 + 4 \cdot (16 - 1) - 1000 : (81 + 19) = 3 + 4 \cdot 15 - 1000 : 100 =$
$= 3 + 60 - 10 = 63 - 10 = 53$
c) $36 + 64 \cdot 17 - (502 - 352 : 8 + 511) = 36 + 1088 - (502 - 352 : 8 + 511) =$
$= 36 + 1088 - (502 - 44 + 511) = 36 + 1088 - (458 + 511) = 36 + 1088 - 969 =$
$= 1124 - 969 = 155$

3. Napišite najmanji i najveći peteroznamenkasti prirodni broj te odredite prethodnika i sljedbenika njihova zbroja.

Rješenje.

Najmanji peteroznamenkasti prirodni broj je 10000.

Najveći peteroznamenkasti prirodni broj je 99999.
Zbroj: $10000 + 99999 = 109999$
Prethodnik zbroja: $109999 - 1 = 109998$.
Sljedbenik zbroja: $109999 + 1 = 110000$.
Prethodnik je 109998, a sljedbenik je 110000.

4. (zadatak za vježbu) U pravokutnike upišite odgovarajuće znamenke tako da račun bude točan.

a)
$$\begin{array}{r} \square\square 8 \\ +\,89\square \\ \hline 1\square 25 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \square\square 6 \\ -\;\;27 \\ \hline 9\square \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \underline{816 \cdot \square\square} \\ 163\square\;\; \\ +\;\;4\square 80 \\ \hline \square\square 40\square \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} \square 90 : 2\square = \square 7 \\ \underline{-\,72} \\ \;\;1\square\square \\ \underline{\;-168} \\ \qquad\;\square \end{array}$$

Rješenje.

a)
$$\begin{array}{r} 928 \\ +\,897 \\ \hline 1825 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 126 \\ -\;\;27 \\ \hline 99 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} \underline{816 \cdot 25} \\ 1632\;\; \\ +\;\;4080 \\ \hline 20400 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} 890 : 24 = 37 \\ \underline{-\,72} \\ \;\;170 \\ \underline{\;-168} \\ \qquad\;2 \end{array}$$

5. U jednom vrtiću među dvadeset sedmero djece su tri djevojčice više od dječaka. Koliko je djevojčica u tom vrtiću?

Rješenje.

$(27 - 3) : 2 = 24 : 2 = 12$
$12 + 3 = 15$
U vrtiću je 15 djevojčica.

6. Koji je broj četiri puta veći od trećine vrijednosti izraza

$$184 \cdot 15 + 15 \cdot 16 - 15 \cdot 100 + 15?$$

Rješenje.

Izračunajmo zadani izraz.
$184 \cdot 15 + 15 \cdot 16 - 15 \cdot 100 + 15 = 15 \cdot (184 + 16 - 100 + 1) = 15 \cdot 101 = 1515$
Trećina dobivenog izraza iznosi $1515 : 3 = 505$.
Broj koji je četiri puta veći od dobivene trećine vrijednosti izraza je $505 \cdot 4 = 2020$.

7. Matko će za 19 godina imati toliko godina koliko je njegov djed imao prije 30 godina. Koliko Matko ima godina ako djed sada ima 59 godina?

Rješenje.

Matko sada ima x godina.
Za 19 godina Matko će imati $x + 19$ godina.
Djed sada ima 59 godina, a prije 30 godina je imao $59 - 30 = 29$ godina.
$x + 19 = 59 - 30$

$x + 19 = 29$
$x = 10$
Matko ima 10 godina.

8. Mate i Tina imaju isti broj sličica. Kada bi Tina imala dva puta više, a Mate pet puta više sličica, zajedno bi imali 140 sličica. Koliko sličica ima svatko od njih?

Rješenje.

x – broj sličica koje ima Tina
x – broj sličica koje ima Mate (jer imaju isti broj sličica)
$2 \cdot x + 5 \cdot x = 140$
$7 \cdot x = 140$
$x = 20$
Mate i Tina imaju po 20 sličica.

9. Brojevi godina Ane, Ene i Ive su tri uzastopna parna broja čiji je zbroj 36. Znajući da je Ana mlađa od Ive, a Iva mlađa od Ene, odredite godine svakog djeteta.

Rješenje.

x – broj godina Ane (najmlađe od njih tri)

x + 2 – broj godina Ive

x + 4 – broj godina Ene

$x + (x + 2) + (x + 4) = 36$

$x + x + 2 + x + 4 = 36$

$3 \cdot x + 6 = 36$

$3 \cdot x = 30$

$x = 10$

Ana ima 10 godina, Iva ima 12, a Ena ima 14 godina.

10. (zadatak za vježbu) Zbroj pet uzastopnih prirodnih brojeva je 4000. Koji je najveći od tih brojeva?

Rješenje.

1. način

x – najmanji od pet uzastopnih prirodnih brojeva

$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 4000$
$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 4000$
$5 \cdot x + 10 = 4000$
$5 \cdot x = 3990$
$x = 3990 : 5$
$x = 798$

Pet uzastopnih prirodnih brojeva čiji je zbroj 4000 su 798, 799, 800, 801 i 802.
Najveći od njih je 802.

2. način

x – najveći od pet uzastopnih prirodnih brojeva

$x + (x - 1) + (x - 2) + (x - 3) + (x - 4) = 4000$
$x + x - 1 + x - 2 + x - 3 + x - 4 = 4000$
$5 \cdot x - 10 = 4000$
$5 \cdot x = 4010$
$x = 4010 : 5$
$x = 802$
Najveći od njih je 802.

11. Zbroj osam uzastopnih neparnih brojeva je 848. Koji je broj najmanji od njih?

Rješenje.

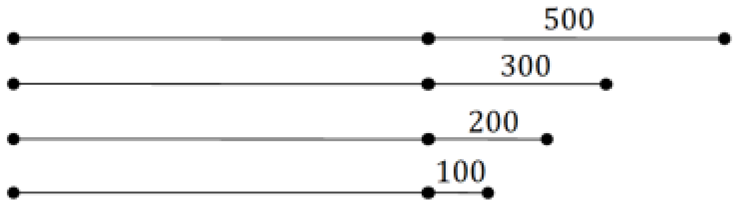
x – najmanji od osam uzastopnih neparnih prirodnih brojeva

$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) + (x + 10) + (x + 12) + (x + 14) = 848$
$8 \cdot x + 56 = 848$
$8 \cdot x = 792$
$x = 792 : 8$
$x = 99$
Osam uzastopnih neparnih brojeva čiji je zbroj 848 su 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111 i 113.
Najmanji od njih je 99.

12. Četiri ribara ulovila su ukupno 3900 kg ribe. Kad je prvi prodao 500 kg, drugi 300 kg, treći 200 kg, a četvrti 100 kg ribe, svakome od njih ostala je jednaka količina ribe. Koliko je kilograma ribe ulovio svaki od njih?

Rješenje.

Grafički predočimo ulov svakog od ribara.



Ukupno su prodali 500 kg + 300 kg + 200 kg + 100 kg = 1100 kg ribe.
Nakon prodaje ostalo je ukupno 3900 kg – 1100 kg = 2800 kg ribe.
2800 kg : 4 = 700 kg.
Nakon prodaje svakom od četiri ribara ostala je jednaka količina ribe, odnosno po 700 kg ribe.
Prvi je ribar ulovio 700 kg + 500 kg = 1200 kg ribe.

Drugi je ribar ulovio 700 kg + 300 kg = 1000 kg ribe.
Treći je ribar ulovio 700 kg + 200 kg = 900 kg ribe.
Četvrti je ribar ulovio 700 kg + 100 kg = 800 kg ribe.

13. Popunite *magični kvadrat* preostalim brojevima od 1 do 16 tako da zbroj u svakom redu, stupcu i dijagonalama uvijek bude 34.

14			
		6	15
8	13		
	10	16	5

Rješenje.

34 – (10 + 16 + 5) = 3
34 – (14 + 8 + 3) = 9
34 – (3 + 13 + 6) = 12
34 – (12 + 15 + 5) = 2
34 – (8 + 13 + 2) = 11
34 – (9 + 6 + 15) = 4
34 – (4 + 13 + 10) = 7
34 – (14 + 7 + 12) = 1

14	7	1	12
9	4	6	15
8	13	11	2
3	10	16	5

14. U izraz $5 \cdot 9 + 12 : 3 - 2$ postavite najmanji broj zagrada tako da rezultat bude:

a) 17 b) 33 c) 57.

Rješenje.

a) $(5 \cdot 9 + 12) : 3 - 2 = (45 + 12) : 3 - 2 = 57 : 3 - 2 = 19 - 2 = 17$

b) $5 \cdot (9 + 12) : 3 - 2 = 5 \cdot 21 : 3 - 2 = 105 : 3 - 2 = 35 - 2 = 33$

c) $5 \cdot 9 + 12 : (3 - 2) = 45 + 12 : 1 = 45 + 12 = 57$

15. (zadatak za vježbu) U izraz $7 \cdot 8 - 48 : 8 + 4 \cdot 12$ postavite najmanji broj zagrada tako da vrijednost izraza bude:

a) 8 b) 504.

METODA INVERZIJE

16. Na mjesto svakog upitnika zapišite odgovarajući broj.

$$\boxed{?} \xrightarrow{+9} \boxed{?} \xrightarrow{\cdot 10} \boxed{?} \xrightarrow{-25} \boxed{?} \xrightarrow{:3} \boxed{25}$$

Rješenje.

Računamo unatrag (metodom inverzije).

$$\boxed{1} \xrightarrow{+9} \boxed{10} \xrightarrow{\cdot 10} \boxed{100} \xrightarrow{-25} \boxed{75} \xrightarrow{:3} \boxed{25}$$

$$1 \xleftarrow{-9} 10 \xleftarrow{:10} 100 \xleftarrow{+25} 75 \xleftarrow{\cdot 3} 25$$

17. Ivana je zamislila neki broj. Dodala mu je 449. Dobiveni je zbroj pomnožila sa 6. Od umnoška je oduzela 1200. Razliku je podijelila s 200 i dobila količnik 9.
Koji je broj na početku zamislila Ivana?

Rješenje.
Računamo unatrag (metodom inverzije).
$9 \cdot 200 = 1800$
$1800 + 1200 = 3000$
$3000 : 6 = 500$
$500 - 449 = 51$

Provjera.
$51 + 449 = 500$
$500 \cdot 6 = 3000$
$3000 - 1200 = 1800$
$1800 : 200 = 9$

Odgovor: Ivana je zamislila broj 51.

18. (zadatak za vježbu) Ivan je zamislio neki broj. Pomnožio ga je brojem 5, umnošku dodao 10, zbroj pomnožio brojem 3, od dobivenog umnoška oduzeo 5, razliku podijelio brojem 10, dobivenom količniku dodao 78 i tako dobio broj 100. Koji je broj Ivan zamislio?

Rješenje. Odgovor: Ivan je zamislio broj 13.

19. (zadatak za vježbu) Matko je zamislio neki broj. Maja je taj broj umanjila 5 puta, količnik uvećala za 12, zbroj uvećala 4 puta, dobiveni umnožak umanjila za 13 pa dodala 23, dobiveni zbroj podijelila brojem 2 i tako dobila broj 37. Koji je broj Matko zamislio?

Rješenje. Odgovor: Matko je zamislio broj 20.

GAUSSOVA DOSJETKA. INDUKTIVNO ZAKLJUČIVANJE.

20. Izračunajte zbroj prvih:

a) 100 prirodnih brojeva

b) 1888 prirodnih brojeva

c) 500 parnih brojeva

d) trideset četiri višekratnika broja 3.

Rješenje.
a)

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51) \\ &= 101 + 101 + \cdots + 101 \\ &= 50 \cdot 101 \\ &= 5050 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+1887+1888 &= (1+1888)+(2+1887)+\cdots+(944+945)\\ &= 1889+1889+\cdots+1889\\ &= 944\cdot 1889\\ &= 1783216\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots+998+1000 &= (2+1000)+(4+998)+\cdots+(500+502)\\ &= 1002+1002+\cdots+1002\\ &= 250\cdot 1002\\ &= 250500\end{aligned}$$

d) Trideset četvrti višekratnik broja 3 je $34\cdot 3=102$

$$\begin{aligned}3+6+9+\cdots+96+99+102 &= 105+105+\cdots+105\\ &= 17\cdot 105\\ &= 1785\end{aligned}$$

21. (zadatak za vježbu) Kolika je razlika zbroja prvih 250 višekratnika broja 8 i zbroja prvih 500 parnih brojeva?

Rješenje.

$(8+16+24+\cdots+1992+2000)-(2+4+6+\cdots+998+1000)=$

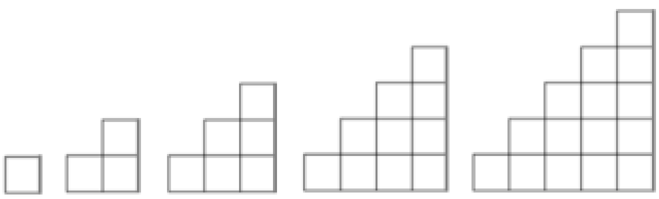
$=125\cdot 2008-250\cdot 1002=251000-250500=500.$

22. Na slici je prikazano prvih pet likova sastavljenih od sukladnih kvadratića.

a) Skicirajte šesti lik.

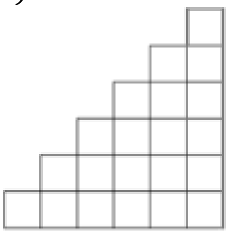
b) Od koliko se kvadratića sastoji deseti lik po redu?

c) Od koliko se kvadratića sastoji tisućiti lik po redu?



Rješenje.

a)



b) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=5\cdot 11=55$

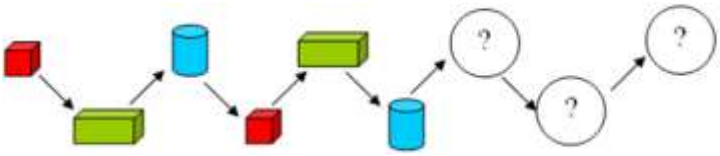
Deseti se lik sastoji od 55 kvadratića.

c) $1+2+\ 3+\cdots+999+1000=500\cdot 1001=500500$

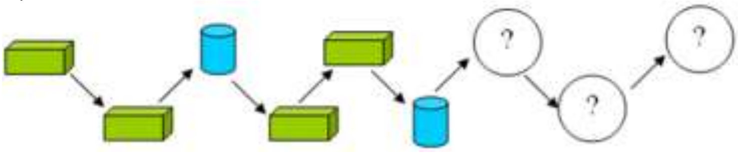
Tisućiti se lik sastoji od 500500 kvadratića.

23. Nastavite niz.

a)

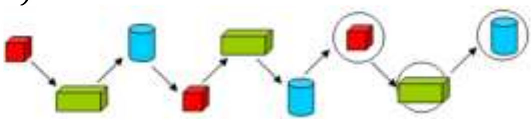


b)

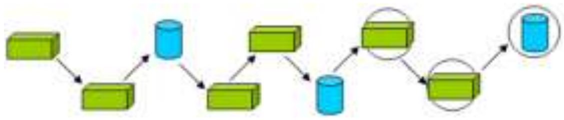


Rješenje.

a)



b)



24. Odredite sljedeća dva člana niza. Obrazložite.

a) 1, 4, 8, 13, 19, …
b) 2, 4, 16, …
c) 3, 4, 6, 10, 18, …
d) 2, 5, 7, 12, 19, …
e) 7, 3, 14, 3, 21, 3, 28, 3, …
f) 4, 13, 8, 16, 12, 19, 16, 22, 20, 25, 24, …

Rješenje.

a) $1+3=4$, $4+4=8$, $8+5=13$, $13+6=19$, $19+7=26$, $26+8=34$, ...

1, 4, 8, 13, 19, **26**, **34**, ...

b) $2\cdot 2=4$, $4\cdot 4=16$, $16\cdot 16=256$, $256\cdot 256=65536$, ...

2, 4, 16, **256**, **65536**, ...

c) 3, $3+2^0=3+1=4$, $4+2^1=4+2=6$, $6+2^2=6+4=10$,

$10+2^3=10+8=18$, $18+2^4=18+16=34$, $34+2^5=34+32=66$, ...

3, 4, 6, 10, 18, **34**, **66**, ...

d) $2+5=7$, $5+7=12$, $7+12=19$, $12+19=31$, $19+31=50$, ...

2, 5, 7, 12, 19, **31**, **50**, ...

e) 7, 3, 14, 3, 21, 3, 28, 3, **35**, **3**, ...

f) Brojeve označene crveno uvećavamo za 4, a plavo za 3.

4, 13, 8, 16, 12, 19, 16, 22, 20, 25, 24, **28**, **28**, ...

25. (zadatak za vježbu) Kojim brojem iz donjeg retka možete nastaviti niz brojeva u gornjem retku? Obrazložite.

a)

3, 8, 13, 18, 23,...				
27	28	29	30	31

b)

2, 7, 13, 20, 28,...				
30	31	33	37	39

26. Zadan je niz brojeva 5, 9, 13, 17, 21,...

a) Odredite 100. član zadanog niza.

b) Odredite umnožak 20. i 19. člana zadanog niza.

c) Odredite n–ti član zadanog niza.

Rješenje.

a) Svaki sljedeći član zadanog niza je za 4 veći od prethodnog člana.

1. član je 5.

2. član je $9=5+1\cdot 4$

3. član je $13=5+2\cdot 4$

$\vdots$

100. član zadanog niza je $5+99\cdot 4=5+396=401$

b) 20. član zadanog niza jednak je

$5 + 19 \cdot 4 = 5 + 76 = 81$,

a 19. član zadanog niza jednak je

$5 + 18 \cdot 4 = 5 + 72 = 77$.

Umnožak 20. i 19. člana zadanog niza jednak je $81 \cdot 77 = 6237$.

c) $5 + (n - 1) \cdot 4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$

$4n + 1$ je n–ti član zadanog niza.

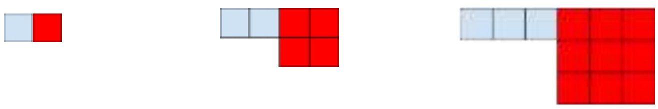
27. (zadatak za vježbu) Dopunite niz slika. Prebrojite dijelove te ispod svake slike zapišite odgovarajući broj.

	1.	2.	3.	4.	5.

a)

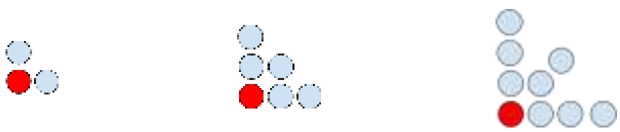
$3 + 1 \cdot 2 = 5$	$3 + 2 \cdot 2 = 7$	$3 + 3 \cdot 2 = 9$	$3 + 4 \cdot 2 = 11$	$3 + 5 \cdot 2 = 13$

b)



$1 + 1 = 2$	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 12$	$4 \cdot (1 + 4) = 20$	$5 \cdot (1 + 5) = 30$

c)

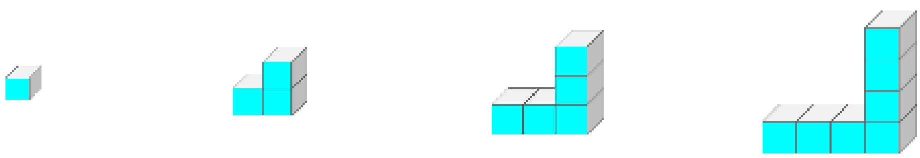


1+2 =3	1+2+3	1+2+3+3	1+2+3+3+3

d)

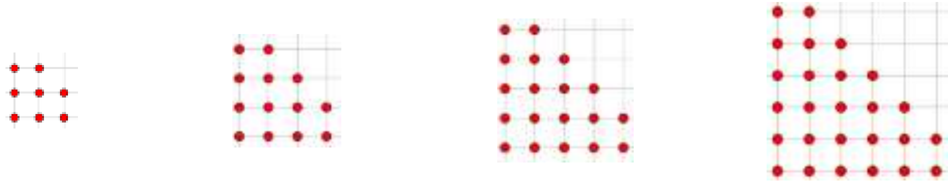
2+4=6	2+4+4	$2+3 \cdot 4$	$2+4 \cdot 4$

e)



1	$1+2 \cdot 1$	$1+2 \cdot 2$	$1+2 \cdot 3$

f)

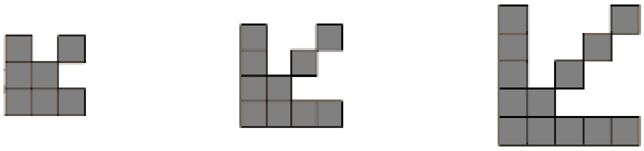


8

8 + 5

8 + 5 + 6

g)

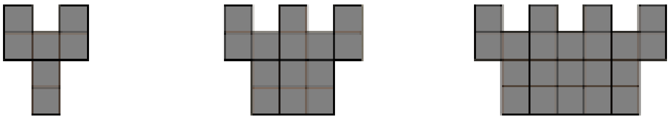


7

7+3

7+3+3

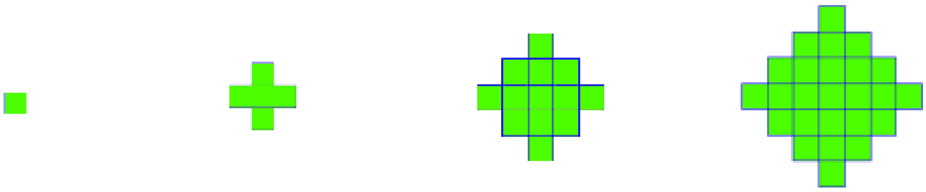
h)



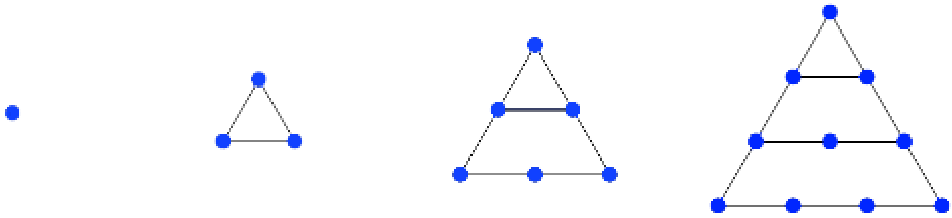
7

7+7

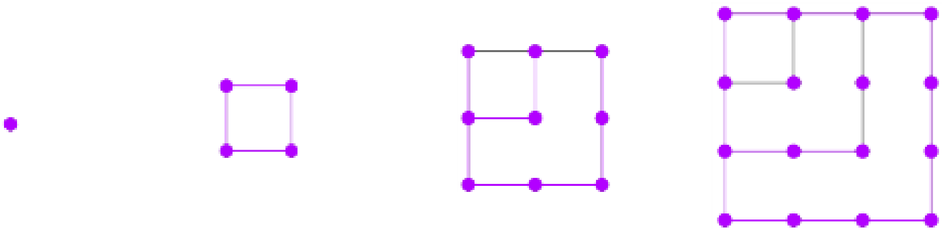
i)



j)



k)



V. RIMSKI ZAPIS BROJEVA

Rimski zapis broja	Arapski zapis broja	Rimski zapis broja	Arapski zapis broja
I	1	XXX	30
II	2	XL	40
III	3	XLIX	49
IV	4	L	50
V	5	LX	60
VI	6	LXX	70
VII	7	LXXX	80
VIII	8	XC	90
IX	9	XCIX	99
X	10	C	100
XI	11	CL	150
XII	12	CLIX	159
XIII	13	CXC	190
XIV	14	CC	200
XV	15	CCC	300
XVI	16	CD	400
XVII	17	D	500
XVIII	18	DC	600
XIX	19	CM	900
XX	20	M	1000

ZADATCI

1. Popunite tablicu.

Arapski zapis broja	Rimski zapis broja
	CCCXLVII
	CI
29	
56	
68	

Rješenje.

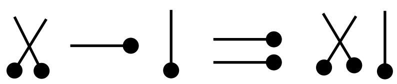
Arapski zapis broja	Rimski zapis broja
347	CCCXLVII
101	CI
29	**XXIX**
56	**LVI**
68	**LXVIII**

2. (zadatak za vježbu) Popunite tablicu.

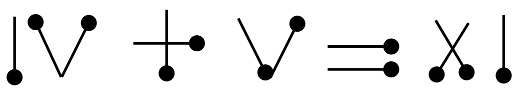
Rimski zapis broja	Arapski zapis broja
IV	
	38
CII	
XLVI	
MCMXCVII	
	2021

3. Premjestite jednu šibicu tako da jednakost bude istinita.

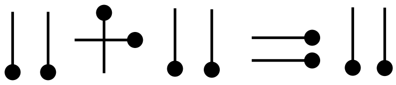
a)



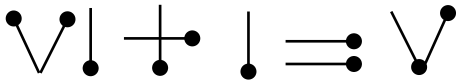
b)



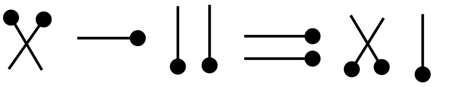
c)



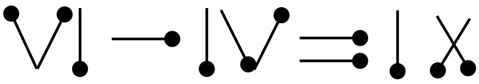
d)



e)

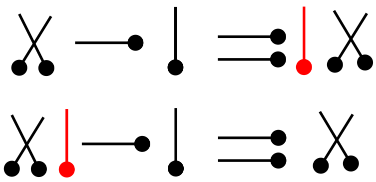


f)

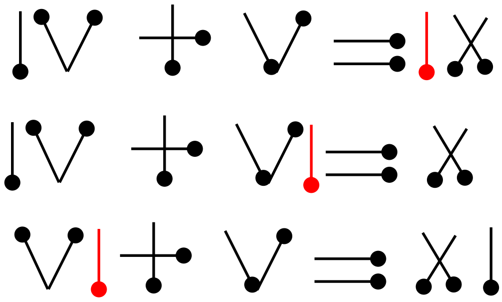


Rješenje.

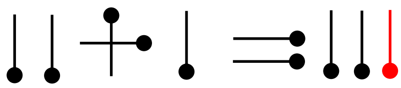
a)



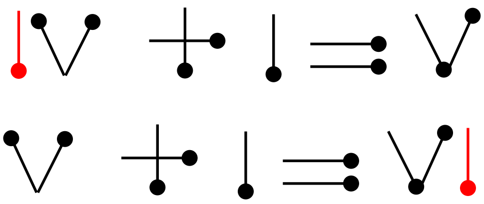
b)



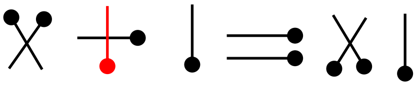
c)



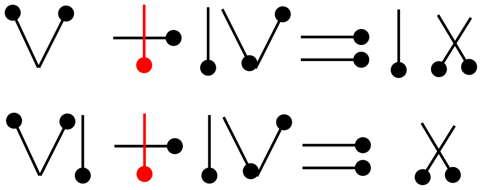
d)



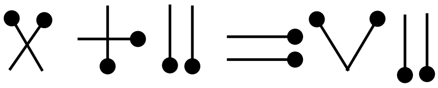
e)



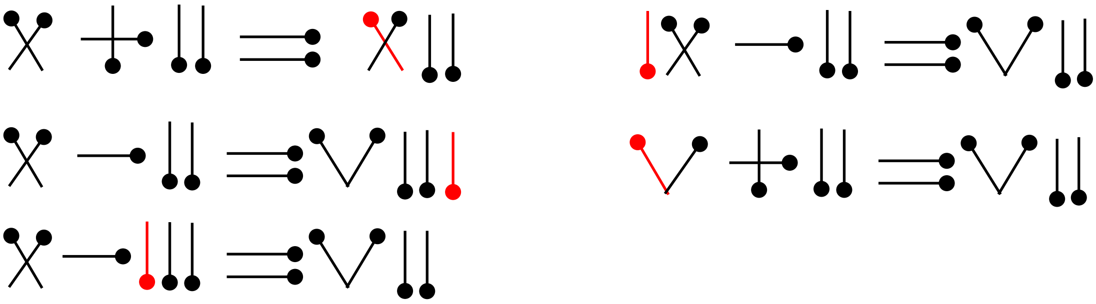
f)



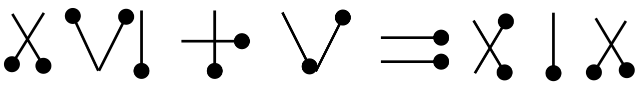
4. Premjestite jednu šibicu tako da jednakost bude istinita. Pronađite sva rješenja.



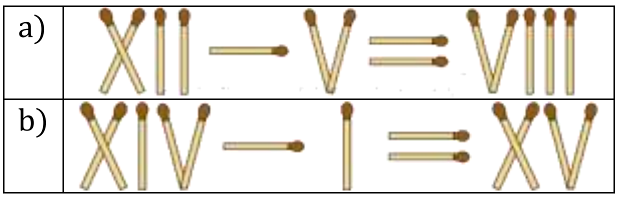
Rješenje.



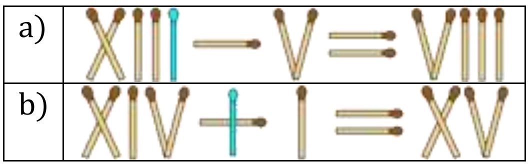
5. (zadatak za vježbu) Premjestite jednu šibicu tako da jednakost bude istinita. Pronađite sva rješenja.



6. Dodajte jednu šibicu tako da jednakost bude istinita.



Rješenje.



7. Izraz MMCDLXIV : XVI + XXIX · XVII zapišite arapskim brojkama te izračunajte. Dobiveni rezultat prikažite rimskim brojkama.

Rješenje.

MMCDLXIV : XVI + XXIX · XVII = 2464 : 16 + 29 · 17 = 154 + 493 = 647 = DCXLVII

8. (zadatak za vježbu) Izraz VII · VI + XII : III − I zapišite arapskim brojkama te postavite najmanji broj zagrada tako da vrijednost izraza bude:

a) XLI   b) XLVIII.

Rješenje.

a) VII · (VI + XII) : III − I = 7 · (6 + 12) : 3 − 1 = 7 · 18 : 3 − 1 = 126 : 3 − 1 = 42 − 1 = 41

b) VII · VI + XII : (III − I) = 7 · 6 + 12 : (3 − 1) = 42 + 12 : 2 = 42 + 6 = 48.

9. (zadatak za vježbu) Zapišite arapskim brojkama pa izračunajte.

$$\mathrm{III} + \mathrm{VI} + \mathrm{IX} + \mathrm{XII} + \cdots + \mathrm{XCIII} + \mathrm{XCVI} + \mathrm{XCIX} + \mathrm{CII}$$

Rezultat zapišite rimskim brojkama.

Rješenje.

$\mathrm{III} + \mathrm{VI} + \mathrm{IX} + \mathrm{XII} + \cdots + \mathrm{XCIII} + \mathrm{XCVI} + \mathrm{XCIX} + \mathrm{CII} =$

$= \underbrace{3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 93 + 96 + 99 + 102}_{\text{34 pribrojnika}}$

102 : 3 = 34
102 je trideset četvrti višekratnik broja 3.

Gaussovom dosjetkom zbrojimo 34 pribrojnika.

$= (3 + 102) + (6 + 99) + \cdots + (51 + 54)$

$= \underbrace{105 + 105 + 105 + \cdots + 105}_{\text{17 pribrojnika}}$

$= 17 \cdot 105$

$= 1785$

$=$ MDCCLXXXV

VI. MJERENJE

ZADATCI

1. Preračunajte.
   a) 1 m = _____ dm = _____ cm
   b) 7200 s = _______h
   c) 4 dm 2 cm = _____ cm = _____ mm
   d) 1 m^2 = _____ dm^2 = _______ cm^2 = ________ mm^2
   e) 8 m^3 5000 cm^3 = ______ dm^3
   f) 5 l = _____ dl
   g) 1 kg = _____ dag = _____ g
   h) 200 dag = _____ kg
   i) 70000 dm^3 1000000 cm^3 = ______ m^3
   j) 70000 cm^2 = ______ m^2
   k) 25 kg 80 g = ______dag
   l) 1 dan = ______min
   m) 750 dl= __________l
   n) 8040000 cm^3 = _____________ dm^3
   o) 32 l =_______ cm^3

Rješenje.

a) 1 m = 10 dm = 100 cm
b) 7200 s = 2 h
c) 4 dm 2 cm = 42 cm = 420 mm
d) 1 m^2 = 100 dm^2 = 10 000 cm^2 = 1 000 000 mm^2
e) 8 m^3 5000 cm^3 = 8005 dm^3
f) 5 l = 50 dl
g) 1 kg = 100 dag = 1000 g
h) 200 dag = 2 kg
i) 70000 dm^3 1000000 cm^3 = 71 m^3
j) 70000 cm^2 = 7 m^2
k) 25 kg 80 g = 2508 dag
l) 1 dan = 1440 min
m) 750 dl= 75 l
n) 8040000 cm^3 = 8040 dm^3
o) 32 l = 32 dm^3 =32000 cm^3

2. (zadatak za vježbu) Preračunajte.
   a) 1907509 cm = ___km___m___dm___cm
   b) 205 m 3 dm 1 mm = ____mm
   c) 1907509 s = ___dana___h___min____s
   d) 12 dana 23 h 57 min 3 s = _____s

e) 5 t 44 kg 2 dag 5 g = _____g

f) 1907509 g =___t ____ kg ____ dag ____ g

Rješenje.

a) 1907509 cm = 19 km 75 m 0 dm 9 cm

b) 205 m 3 dm 1 mm = 205301 mm

c) 1907509 s = 22 dana 1 h 51 min 49 s

d) 12 dana 23 h 57 min 3 s = 1123023 s

e) 5 t 44 kg 2 dag 5 g = 5044025 g

f) 1907509 g = 1 t 907 kg 50 dag 9 g

3. (zadatak za vježbu) Izračunajte.

a) 5 m + 805 cm = ____dm

b) 5 m + 8050 cm = _____dm

c) 78 dm^2 – 89070 mm^2 =_____ dm^2 ____ cm^2 ____mm^2

d) 38 cm^3 – 9 254 mm^3=_____ cm^3 _____mm^3

e) 2 m^2 54 dm^2 71 cm^2 + 46 dm^2 30 cm^2 =_____ m^2 _____dm^2 _____cm^2

f) 51 km 51 m 5 dm – 50 km 999 m 9 dm= _____ dm

g) 3 m^2 55 dm^2 37 cm^2 + 7 m^2 44 dm^2 73 cm^2 = ____ m^2 ____ dm^2 ____cm^2

h) 2 dana 23 h 34 min + 23 h 34 min =____ dana _____ h _____min

i) 3 t 23 kg 67 dag 9 g + 2 t 999 kg 32 dag 9 g = _____t _____ kg ____ dag _____g

Rješenje.

a) 5 m + 805 cm = 130,5 dm

b) 5 m + 8050 cm = 855 dm

c) 78 dm^2 – 89070 mm^2 = 69 dm^2 9 cm^2 30 mm^2

d) 38 cm^3 – 9 254 mm^3 = 28 cm^3 746 mm^3

e) 2 m^2 54 dm^2 71 cm^2 + 46 dm^2 30 cm^2 = 3 m^2 1 dm^2 1 cm^2

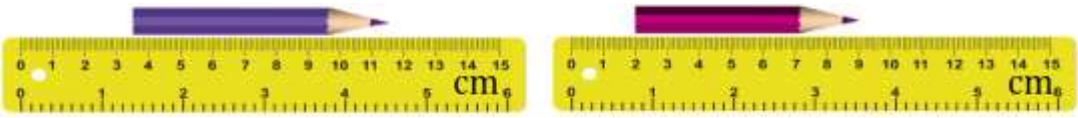
f) 51 km 51 m 5 dm – 50 km 999 m 9 dm = 516 dm

g) 3m^2 55 dm^2 37 cm^2 + 7 m^2 44 dm^2 73 cm^2 = 11 m^2 0 dm^2 10 cm^2

h) 2 dana 23 h 34 min + 23 h 34 min = 3 dana 23 h 8 min

i) 3 t 23 kg 67 dag 9 g + 2 t 999 kg 32dag 9 g = 6 t 23 kg 0 dag 8g

4. (zadatak za vježbu) Kolika je razlika u duljini dviju olovaka sa slike?



Rješenje. 1 cm.

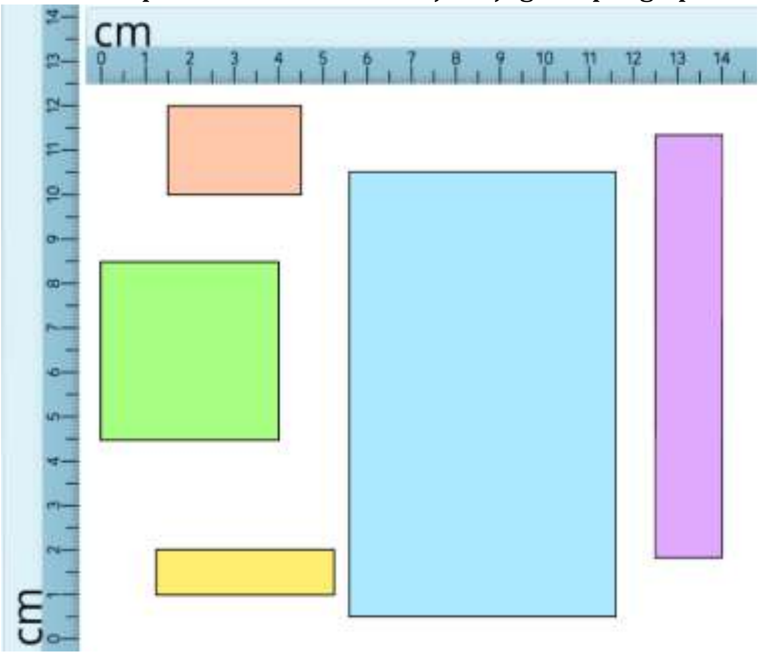
5. Na sat smo pogledali dva puta u istom popodnevu. Prvo vrijeme prikazuje sat na slici A, a drugo vrijeme sat na slici B. Koliko je vremena prošlo od prvog do drugog gledanja na sat?

A B

Rješenje.

Kada smo prvi put pogledali na sat bilo je 12 sati i 45 minuta. Drugi put je bilo 17 sati i 15 minuta. Prošla su 4 sata i 30 minuta ili 270 minuta.

6. (zadatak za vježbu) Pomoću ravnala sa slike odredite duljine stranica svakog pravokutnika. Za svaki pravokutnik izračunajte njegov opseg i površinu.



7. S koliko se keramičkih pločica pravokutnog oblika duljine 2 dm i širine 1 dm može popločiti pravokutni pod hodnika duljine 2 m i širine 1 m?

Rješenje.

Označimo površinu jedne pločice s P_p, a površinu hodnika s P_h.

$P_p = 2\text{ dm} \cdot 1\text{ dm} = 2\text{ dm}^2$

$P_h = 2\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 2\text{ m}^2 = 200\text{ dm}^2$

Ako površinu poda hodnika podijelimo s površinom jedne pločice, dobit ćemo broj pločica potrebnih za popločavanje poda hodnika.

$P_h : P_p = 200\text{ dm}^2 : 2\text{ dm}^2 = 100$

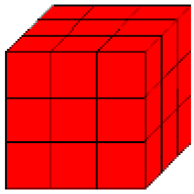
Pod hodnika se može popločiti sa 100 takvih pločica.

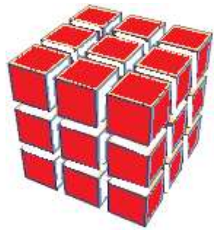
8. (zadatak za vježbu) S koliko se keramičkih pločica pravokutnog oblika duljine 2 dm 5 cm i širine 20 cm može popločiti pravokutni pod hodnika duljine 35 dm i širine 1 m 6 dm?

Rješenje. Pod hodnika se može popločiti sa 112 takvih pločica.

9. Drvena kocka duljine brida 3 cm po cijeloj je površini obojena crvenom bojom, a zatim razrezana na kockice duljine brida 1 cm.
Koliko će kockica imati četiri, koliko tri, koliko dvije, koliko jednu, a koliko niti jednu obojenu stranu?
Koliko bi bilo visoko geometrijsko tijelo ako bi sve kockice stavili jednu na drugu?

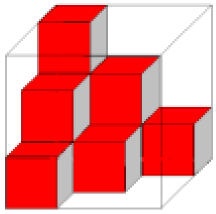
Rješenje.





Bez obojanih strana je samo jedna kockica.
Šest kockica ima jednu obojanu stranu.
Dvanaest kockica ima dvije obojane strane.
Osam kockica ima tri obojane strane.
Ne postoji kockica koja ima četiri obojane strane.
Ako sve kockice, njih 27, postavimo jednu na drugu složili bismo geometrijsko tijelo (kvadar) visine 27 cm.

10. Tina ima kocke s bridovima duljine 1 dm. Neke je od njih stavila u staklenu kutiju koja ima oblik kocke duljine brida 3 dm.
Koliko još najviše kocaka Tina može staviti u staklenu kutiju?



Rješenje.

U kocku brida 3 dm možemo staviti ukupno $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kocaka duljine brida 1 dm.
Na slici vidimo da je Tina u staklenu kutiju posložila 10 kocaka pa još može staviti najviše $27 - 10 = 17$ kocaka.

11. Kako iz bačve s 10 litara tekućine odmjeriti 4 litre tekućine pomoću dvije posude od 3 litre i 5 litara?

Rješenje.

Jedno od rješenja je prikazano sljedećim pretakanjem.

10 l	5 l	3 l
10	0	0
5	5	0
5	2	3
8	2	0
8	0	2
3	5	2
3	4	3

Nakon zadnjeg pretakanja u posudi od 5 litara ostalo je 4 litre tekućine.

12. (zadatak za vježbu) Masa jedne čokolade je 100 grama. Mama je kupila četiri takve čokolade, a djeca su pojela 85 grama. Koliko je grama čokolade ostalo?

Rješenje.

$4 \cdot 100 \text{ g} - 85 \text{ g} = 315 \text{ g}$

Ostalo je 315 g čokolade.

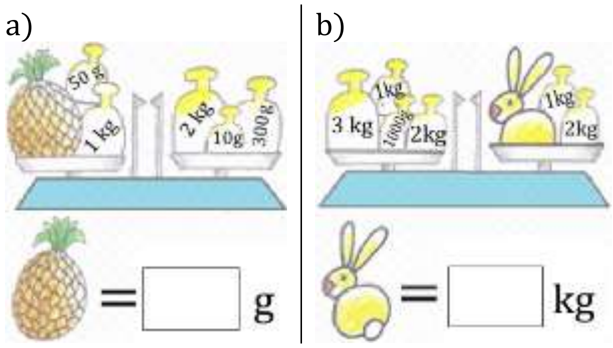
13. Koliko je potrebno vremena da bi se otisnulo deset tisuća slova ako se tiska
   a) stotinu slova u minuti
   b) dva slova u sekundi?

Rješenje.

a) Ako za 100 slova treba 1 minuta, onda za 10000 slova treba 100 puta više minuta, tj. 100 min = 1 h 40 min.

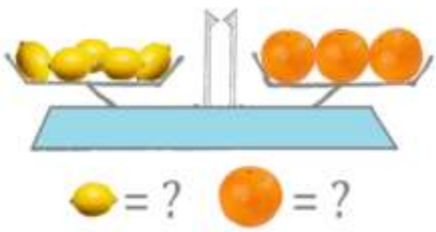
b) Ako za 2 slova treba 1 sekunda, onda za 10000 slova treba 5000 puta više sekundi, tj. 5000 s = 83 min 20 s = 1 h 23 min 20 s.

14. (zadatak za vježbu) Na temelju crteža izračunajte masu.



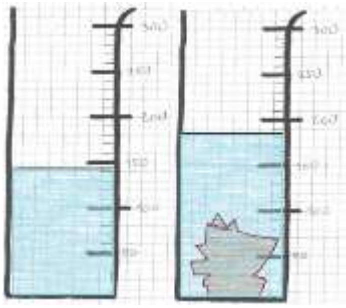
Rješenje. a) 1260 g   b) 4 kg

15. (zadatak za vježbu) Na jednom kraku vage je 5 limuna jednake mase. Na drugom kraku vage su 3 naranče jednake mase. Vaga je u ravnoteži. Ukupna masa svih limuna i naranči je 1 kg 32 dag. Koliko grama ima jedan limun, a koliko jedna naranča?



Rješenje. Limun ima masu 132 g, a naranča 220 g.

16. Očitaj s menzure razinu tekućine prije i poslije uranjanja nepravilnog tijela.
Koliki je obujam uronjenog tijela izraženog u cm^3?



Rješenje.

$1\ cm^3 = 1\ ml$

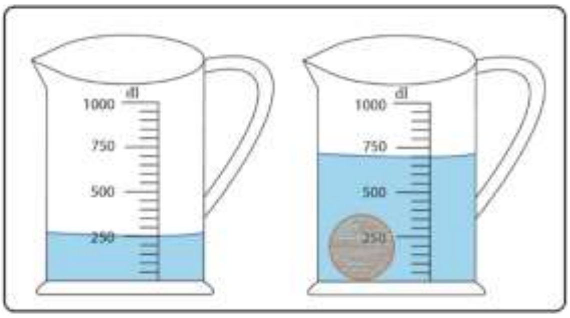
$V_{\text{nepravilnog tijela}} = V_{\text{poslije}} - V_{\text{prije}}$

$V_{\text{prije}} = 145\ ml = 145\ cm^3$

$V_{\text{poslije}} = 185\ ml = 185\ cm^3$

$V_{\text{nepravilnog tijela}} = 185\ cm^3 - 145\ cm^3 = 40\ cm^3$

17. Promotrite sliku posude s vodom prije i nakon što je Matko stavio u nju kuglu. Izračunajte obujam kugle. Obujam izrazite u dm^3.



Rješenje.

Neka je $V_1 = 250$ dl očitani obujam prije, a $V_2 = 700$ dl obujam nakon stavljanja kugle u posudu s vodom.

$V = V_2 - V_1 = 700\ dl - 250\ dl = 450\ dl = 45\ l$

$1\ l = 1\ dm^3$ pa je volumen kugle $V = 45\ dm^3$.

18. Sanduk s jabukama ima masu 35 kg, a sanduk do polovice napunjen jabukama ima masu 19 kg. Kolika je masa samog sanduka?

Rješenje.

Prvi način.

Sanduk pun jabuka ima masu 35 kg, a sanduk do pola napunjen jabukama 19 kg.

Količina jabuka koja nedostaje ima masu 35 kg – 19 kg = 16 kg.

Same jabuke iz pola sanduka imaju masu 16 kg, a jabuke iz cijelog sanduka imaju masu

$2 \cdot 16$ kg = 32 kg.

Zaključujemo da je masa praznog sanduka 35 kg – 32 kg = 3 kg.

Odgovor: Masa sanduka je 3 kg.

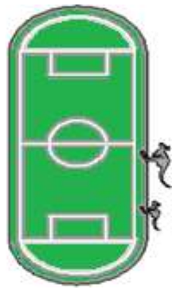
Drugi način.

Ako sanduk do polovice napunjen jabukama ima masu 19 kg, onda dva takva sanduka do polovice napunjena jabukama imaju masu 38 kg.

Budući da jedan sanduk s jabukama ima masu 35 kg, iz toga zaključujemo da je masa sanduka 38 kg – 35 kg = 3 kg.

Odgovor: Masa sanduka je 3 kg.

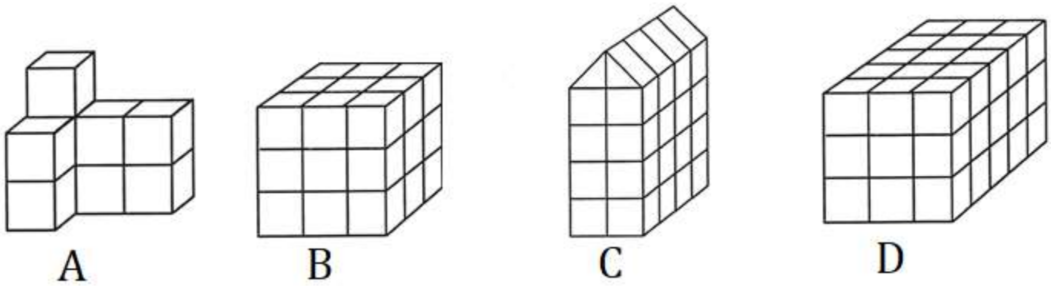
19. Klokanica i njezino mladunče Skočko skaču oko stadiona opsega 400 m. Oboje skaču po jedan skok u sekundi, no duljina majčinog skoka je 5 m, a Skočkova 2 m. Oboje su istovremeno počeli skakati u istom smjeru iz iste početne pozicije. Nakon 35 sekundi Skočko se umorio i stao, a klokanica je nastavila skakati. Nakon koliko će sekundi klokanica prvi put prestići Skočka?



Rješenje.

Mladunče za 35 s prijeđe 70 m. Za to vrijeme majka prijeđe 175 m. Od tog položaja do starta ima 400 m – 175 m = 225 m i još 70 m od starta do mladunca. Klokanica mora prijeći 225 m + 50 m = 295 m, a za to joj treba 295 m : 5 m = 59 skokova. Nakon 59. sekunde će prestići Skočka.

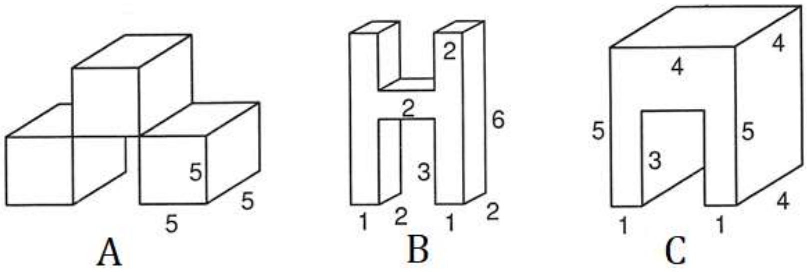
20. Koliki je obujam geometrijskih tijela danih na slici ako je brid svake kocke 1 cm?



Rješenje.

$V_A = 9 \cdot 1\ \text{cm}^3 = 9\ \text{cm}^3$
$V_B = 27 \cdot 1\ \text{cm}^3 = 27\ \text{cm}^3$
$V_C = 36 \cdot 1\ \text{cm}^3 = 36\ \text{cm}^3$
$V_D = 45 \cdot 1\ \text{cm}^3 = 45\ \text{cm}^3$

21. Na slici su dane dimenzije geometrijskih tijela u centimetrima. Izračunajte obujam svakog tijela.



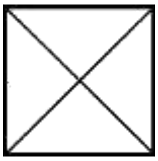
Rješenje.

$V_A = 3 \cdot (5 \text{ cm } \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}) = 3 \cdot 125 \text{ cm}^3 = 375 \text{ cm}^3$
$V_B = 12 \text{ cm}^3 + 4 \text{ cm}^3 + 12 \text{ cm}^3 = 28 \text{ cm}^3$
$V_C = 4 \text{ cm } \cdot 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} - 2 \text{ cm } \cdot 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 80 \text{ cm}^3 - 24 \text{ cm}^3 = 56 \text{ cm}^3$

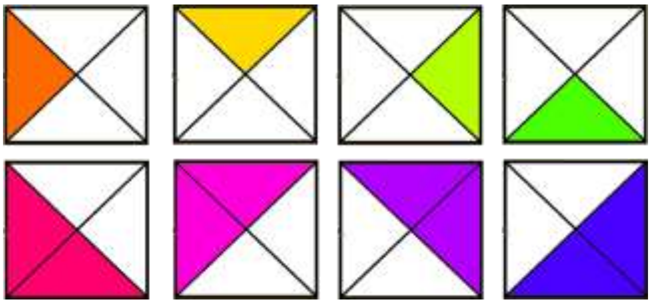
VII. ELEMENTI PLANIMETRIJE I STEREOMETRIJE

ZADATCI

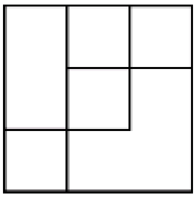
1. Na slici je jedan kvadrat. Koliko je trokuta na slici? Koje su vrste trokuti s obzirom na duljinu stranica i s obzirom na mjere kutova?



Rješenje. Na slici je 8 trokuta. Svi trokuti su jednakokračni pravokutni trokuti.

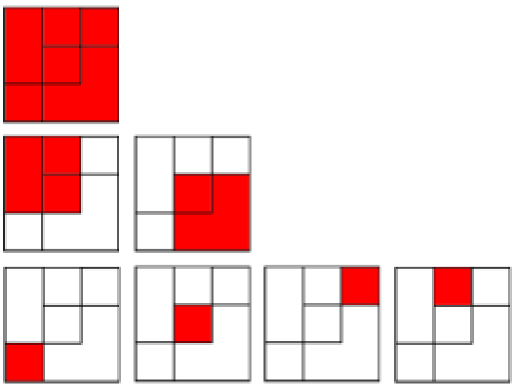


2. a)Koliko je kvadrata na slici?
   b)Koliko je pravokutnika na slici?

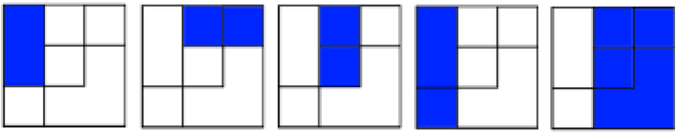


Rješenje.

a)Na slici je 7 kvadrata.



b)Svaki kvadrat je pravokutnik pa pravokutnicima iz zadatka pod a) dodajemo i sljedećih 5 pravokutnika.

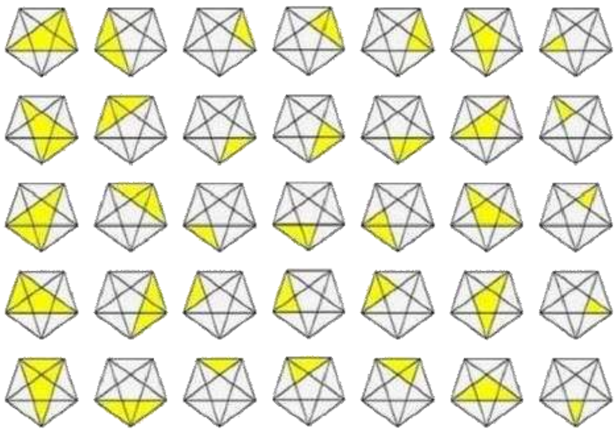


Na slici je ukupno 12 pravokutnika.

3. (zadatak za vježbu) Koliko je trokuta na slici?

4. (zadatak za vježbu) Koliko je trokuta na slici?

Rješenje.

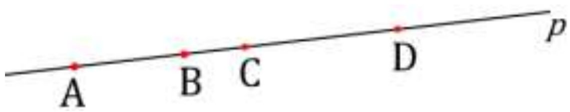


Na slici je 35 trokuta.

5. (zadatak za vježbu) Koliko pravaca možemo povući kroz

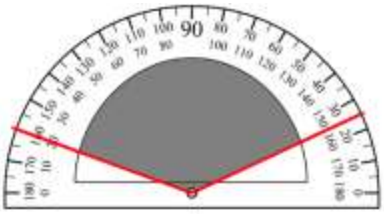
a) jednu točku b) dvije točke u ravnini?

6. Na pravcu p su istaknute 4 točke (vidi sliku). Ispišite sve dužine kojima su zadane točke rubne (krajnje) točke.

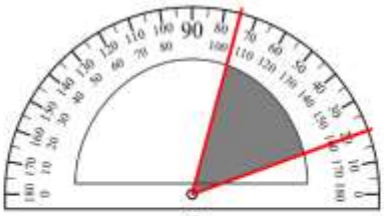


Rješenje. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$

7. Na svakoj od slika A, B, C i D istaknut je kut. Odredite mjeru kuta i vrstu kuta.

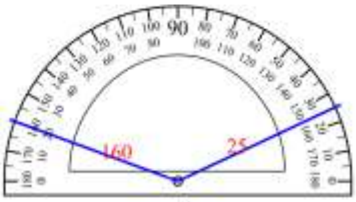

A


B

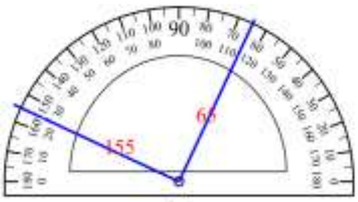

C


D

Rješenje.



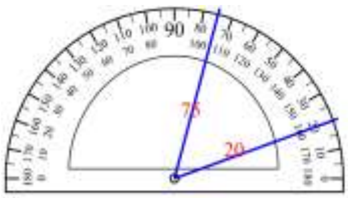
A



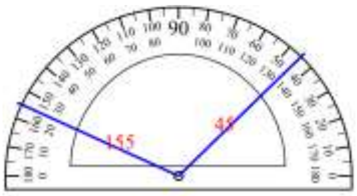
B

$160° - 25° = 135°$
TUPI KUT

$155° - 65° = 90°$
PRAVI KUT



C

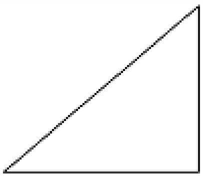
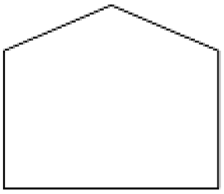
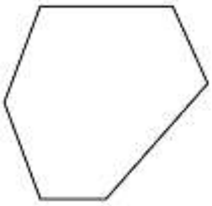
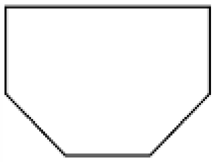


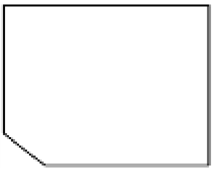
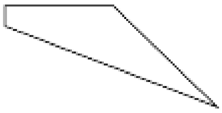
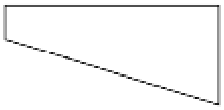
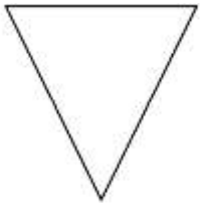
D

$75° - 20° = 55°$
ŠILJASTI KUT

$155° - 45° = 110°$
TUPI KUT

8. Za dani geometrijski lik u tablicu zapišite koliko ima šiljastih, tupih i pravih kutova.

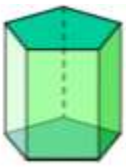
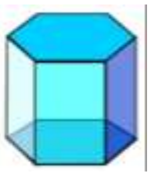
GEOMETRIJSKI LIK	 1.	 2.	 3.	 4.
BROJ ŠILJASTIH KUTOVA				
BROJ TUPIH KUTOVA				
BROJ PRAVIH KUTOVA				

GEOMETRIJSKI LIK	 5.	 6.	 7.	 8.
BROJ ŠILJASTIH KUTOVA				
BROJ TUPIH KUTOVA				
BROJ PRAVIH KUTOVA				

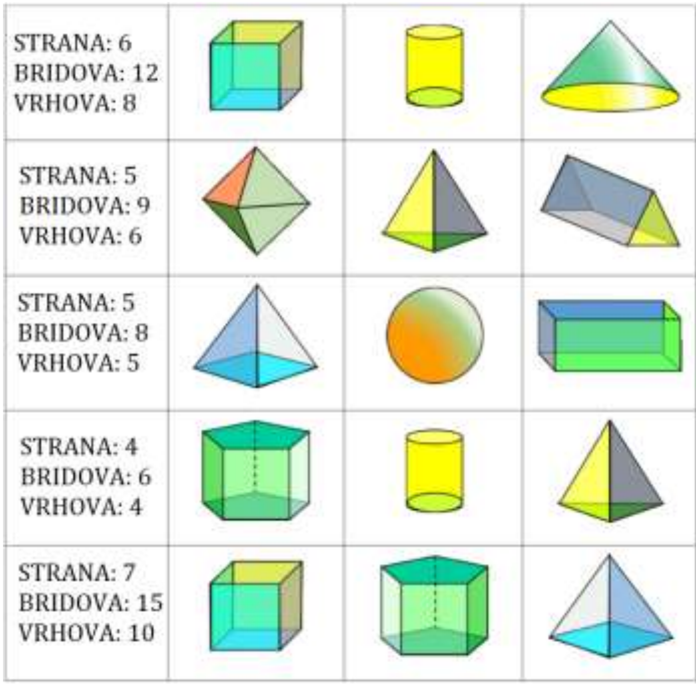
Rješenje.

GEOMETRIJSKI LIK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
BROJ ŠILJASTIH KUTOVA	2	0	0	0	0	1	1	3
BROJ TUPIH KUTOVA	0	3	6	4	2	2	1	0
BROJ PRAVIH KUTOVA	1	2	0	2	3	1	2	0

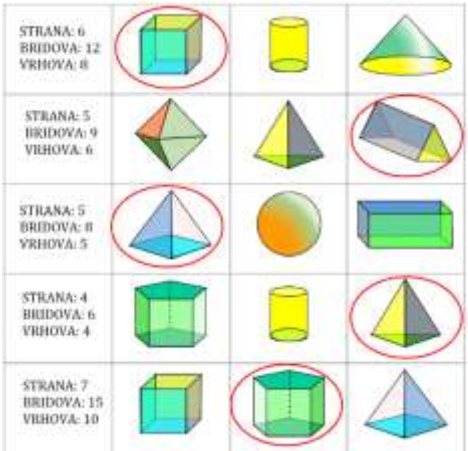
9. (zadatak za vježbu) Ispod svakog geometrijskog tijela zapišite koliko ima strana, bridova i vrhova.

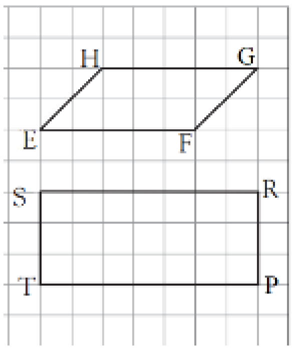
10. U svakom retku tablice zaokružite odgovarajuće geometrijsko tijelo s obzirom na zadani broj strana, bridova i vrhova.



Rješenje.



11. Marko je nacrtao dva lika u bilježnicu s kvadratićima (vidi sliku). Ako je površina lika EFGH 10 cm^2, koliki je opseg lika PRST?

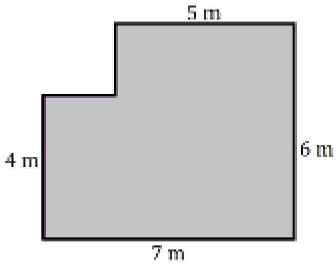


Rješenje.

Površina lika EFGH jednaka je površini 10 kvadratića Markove bilježnice pa je površina jednog kvadratića 10 cm^2 : 10 = 1 cm^2. Duljina stranice kvadratića površine 1 cm^2 je 1 cm.

Opseg pravokutnika PRST je 2·(7 cm + 3 cm) = 2 · 10 cm = 20 cm.

12. Matko je s roditeljima preselio u novi stan čiji je tlocrt prikazan na slici. Kolika je površina tog stana?



Rješenje.

Neka od mogućih načina rješavanja zadatka su:

$P_S = 7\text{ m} \cdot 6\text{ m} - 2\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 42\text{ m}^2 - 4\text{ m}^2 = 38\text{ m}^2$

ili

$P_S = 7\text{ m} \cdot 4\text{ m} + 5\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 28\text{ m}^2 + 10\text{ m}^2 = 38\text{ m}^2$

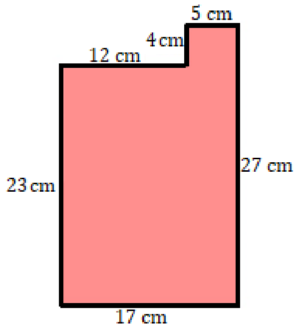
ili

$P_S = 4\text{ m} \cdot 2\text{ m} + 5\text{ m} \cdot 6\text{ m} = 8\text{ m}^2 + 30\text{ m}^2 = 38\text{ m}^2$

pri čemu je P_S površina stana.

Površina stana je 38 m^2.

13. (zadatak za vježbu) Izračunajte opseg i površinu lika danog na slici.



Rješenje.

Opseg lika jednak je zbroju duljina njegovih stranica

$(17 + 27 + 5 + 4 + 12 + 23)\text{ cm} = 88\text{ cm}.$

Ili

Opseg danog lika jednak je opsegu pravokutnika sa stranicama duljine 17 cm i 27 cm.

Površina lika jednaka je zbroju površina pravokutnika dimenzija:

$17\text{ cm} \times 23\text{ cm}$ i $5\text{ cm} \times 4\text{ cm}$.

$P = 391\text{ cm}^2 + 20\text{ cm}^2 = 411\text{ cm}^2$.

14. (zadatak za vježbu) Duljina osnovice jednakokračnog trokuta je 3 cm 6 mm. Opseg mu je jednak opsegu jednakostraničnog trokuta kojemu je duljina stranice 5 cm 2 mm. Izračunajte duljinu kraka jednakokračnog trokuta.

Rješenje. Duljina kraka jednakokračnog trokuta iznosi 60 mm = 6 cm.

15. Duljine stranica trokuta izražene u milimetrima su tri uzastopna parna broja. Ako je opseg trokuta 180 mm, izračunajte duljine stranica tog trokuta.

Rješenje.

Neka su a, b i c stranice trokuta pri čemu je $b = a + 2$ i $c = a + 4$.

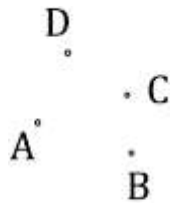
$a + b + c = O$

$a + (a + 2) + (a + 4) = 180\text{ mm}$

$3 \cdot a = 174$ mm

$a = 58$ mm, $b = 60$ mm, $c = 62$ mm.

16. U ravnini su zadane 4 točke kao na slici. Ispišite
   a) sve dužine kojima su zadane točke rubne (krajnje) točke.
   b) sve trokute s vrhovima u zadanim točkama.



Rješenje.

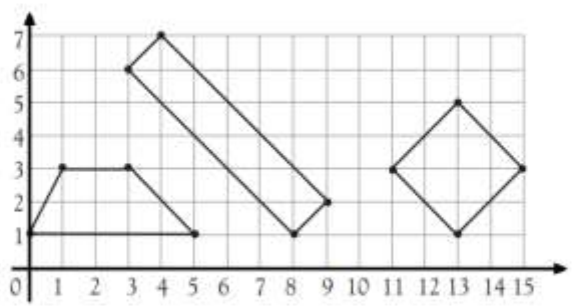
Dužine su: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}$.

Trokuti su: $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD, \Delta BCD$.

17. Matko je u bilježnici s kvadratićima u isti koordinatni sustav redom ucrtao točke
   a) (0, 1), (1, 3), (3, 3), (5, 1), (0, 1)
   b) (3, 6), (4, 7), (9, 2), (8, 1), (3, 6)
   c) (11, 3), (13, 5), (15, 3), (13, 1), (11, 3)
   te ih tim redom spojio izlomljenom crtom.

   Koje je likove nacrtao Matko?
   Kolika je površina svakog pojedinog lika koji je Matko nacrtao ako je duljina stranice kvadratića u Matkovoj bilježnici 5 mm?

Rješenje.



a) Trapez. Površina trapeza jednaka je površini 7 kvadratića iz bilježnice.

$$7 \cdot (5\text{ mm} \cdot 5\text{ mm}) = 7 \cdot 25\text{ mm}^2 = 175\text{ mm}^2.$$

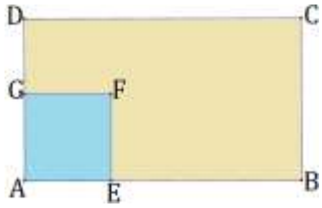
b) Pravokutnik. Površina pravokutnika jednaka je površini 10 kvadratića iz bilježnice.

$$10 \cdot (5\text{ mm} \cdot 5\text{ mm}) = 10 \cdot 25\text{ mm}^2 = 250\text{ mm}^2.$$

c) Kvadrat. Površina kvadrata jednaka je površini 8 kvadratića iz bilježnice.

$$8 \cdot (5\text{ mm} \cdot 5\text{ mm}) = 8 \cdot 25\text{ mm}^2 = 200\text{ mm}^2.$$

18. (zadatak za vježbu) Iz pravokutnika ABCD izrezan je kvadrat AEFG opsega 120 cm kao na slici. Ako duljina dužine $\overline{EB}$ iznosi 5 dm, a duljina dužine $\overline{GD}$ 200 mm, kolika je površina pravokutnika ABCD ?



Rješenje.

$O_{AEFG} = 4 \cdot |AE| = 120 \text{ cm}$

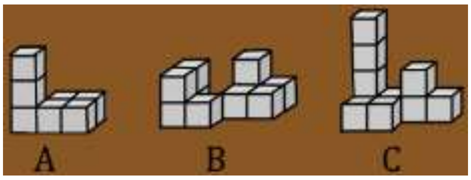
$|AE| = 30 \text{ cm} = 3 \text{ dm}$

$|AB| = |AE| + |EB| = 3 \text{ dm} + 5 \text{ dm} = 8 \text{ dm}$

$|AD| = |AG| + |GD| = 3 \text{ dm} + 2 \text{ dm} = 5 \text{ dm}$

$P_{ABCD} = 8 \text{ dm} \cdot 5 \text{ dm} = 40 \text{ dm}^2$

19. Tijela A, B i C su složena na stol pomoću kocaka duljine brida 1 cm (vidi sliku).
Za svako tijelo odredite
   a) od koliko je kocaka izgrađeno
   b) površinu stola koju pokriva
   c) volumen.



Rješenje.

a) Tijelo A je izgrađeno od 7, tijelo B od 10 i tijelo C od 10 kocaka.
b) Površina jedne strane kocke je površina kvadrata duljine stranice 1 cm.

Površina tog kvadrata iznosi $1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$.

Površine stola koju pokrivaju tijela A, B i C su

$P_A = 5 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 5 \text{ cm}^2$,

$P_B = 7 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 7 \text{ cm}^2$ i

$P_C = 6 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

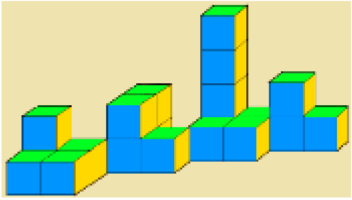
c) Volumen jedne kocke iznosi $1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^3$. Volumen tijela ćemo izračunati tako da broj kocki pomnožimo s volumenom jedne kocke.

$V_A = 7 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 7 \text{ cm}^3$

$V_B = 10 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3$

$V_C = 10 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3$

20. (zadatak za vježbu) Matko je na pod svoje sobe posložio kocke duljine brida 3 cm kao na slici.



a) Koliku je površinu poda Matko prekrio tim kockama?

b) Od koliko se kocaka sastoji Matkova građevina?

c) Koliki je volumen Matkove građevine?

Rješenje.

a) Površina jedne strane kocke je površina kvadrata duljine stranice 3 cm.

Površina tog kvadrata iznosi $3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 9\text{ cm}^2$.

Površina poda prekrivena tim kockicama iznosi: $P = 13 \cdot 9\text{ cm}^2 = 117\text{ cm}^2$.

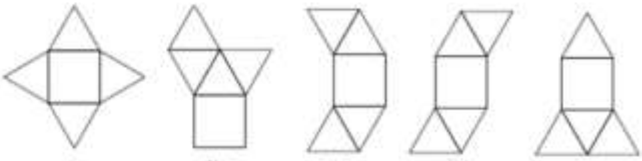
b) Matkova građevina se sastoji od 20 kocaka.

c) Volumen jedne kocke iznosi $3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 27\text{ cm}^3$.

Volumen Matkove građevine je $V = 20 \cdot 27\text{ cm}^3 = 540\text{ cm}^3$.

21.

a) Zaokružite slovo ispod one mreže koja predstavlja mrežu piramide.

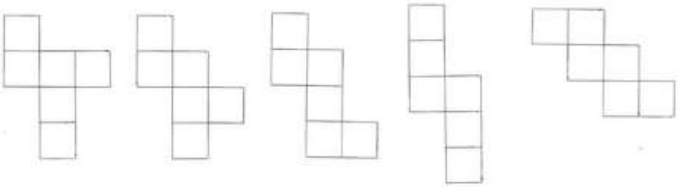


b) Skicirajte pet nesukladnih mreža kocke.

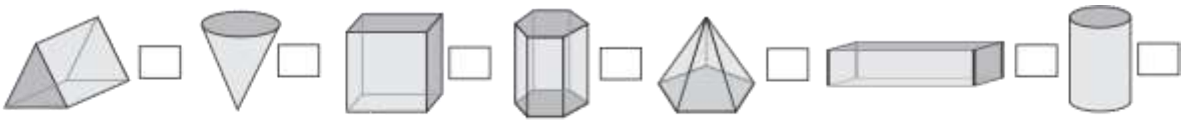
Rješenje.

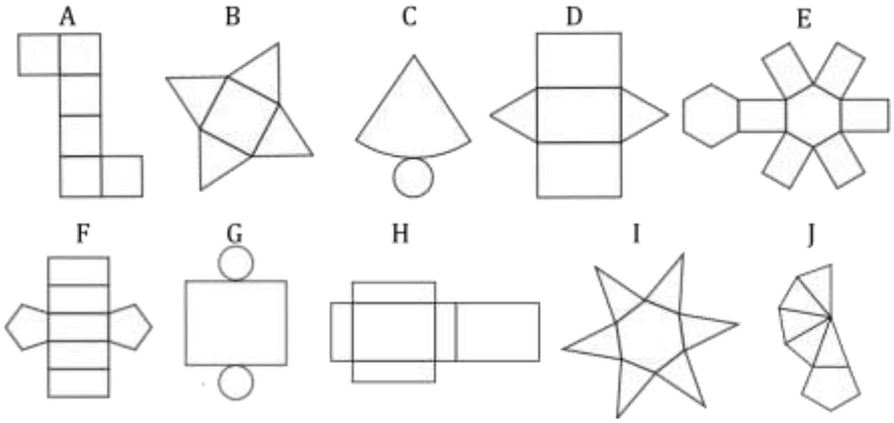
a) Mreže pod A, B, D i E su mreže piramide. Pod C ne može biti mreža piramide (dvije se strane preklapaju).

b) Pet nesukladnih mreža kocke mogu biti



22. (zadatak za vježbu) Svakom geometrijskom tijelu pridružite njegovu mrežu tako da u pravokutnik upišete odgovarajuće slovo.

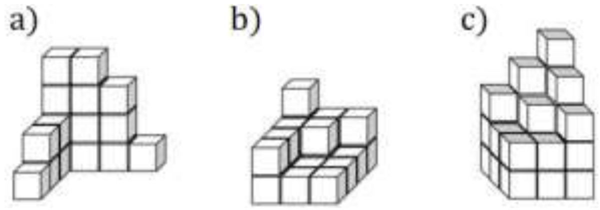




Rješenje. Slova u pravokutnicima s lijeva na desno su: D, C, A, E, J, H, G.

23. Izračunajte volumen tijela sa slike ako je duljina brida kockice

A) 1 cm B) 4 cm.



Rješenje.

A) Volumen jedne kockice je $V = a^3 = 1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$.

a) $V_1 = 17 \cdot 1\text{ cm}^3 = 17\text{ cm}^3$

b) $V_2 = 20 \cdot 1\text{ cm}^3 = 20\text{ cm}^3$

c) $V_3 = 28 \cdot 1\text{ cm}^3 = 28\text{ cm}^3$

B) Volumen jedne kockice je $V = a^3 = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 64\text{ cm}^3$

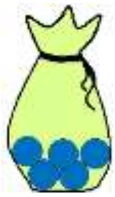
a) $V_1 = 17 \cdot 64\text{ cm}^3 = 1088\text{ cm}^3$

b) $V_2 = 20 \cdot 64\text{ cm}^3 = 1280\text{ cm}^3$

c) $V_3 = 28 \cdot 64\text{ cm}^3 = 1792\text{ cm}^3$

VIII. ELEMENTI VJEROJATNOSTI

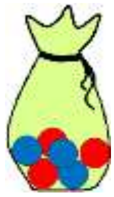
ZADATCI



1. U neprozirnoj se vrećici nalaze plave kuglice kao na slici. Matko iz vrećice nasumce izvlači jednu kuglicu.
   a) Kolika je vjerojatnost da će izvući plavu kuglicu?
   b) Kolika je vjerojatnost da će izvući crvenu kuglicu?
   c) Koliko najmanje kuglica Matko treba izvući kako bi sa sigurnošću mogao tvrditi da je izvučena kuglica plave boje?

Rješenje.

a) 100 % Ovo je siguran događaj.
b) 0 % Ovo je nemoguć događaj.
c) Matko će već u prvom izvlačenju izvući kuglicu plave boje. Dovoljna je jedna izvučena kuglica kako bi sa sigurnošću mogao tvrditi da je izvučena kuglica plave boje.



2. U neprozirnoj se vrećici nalaze crvene i plave kuglice kao na slici. Matko iz vrećice izvlači jednu kuglicu.
   a) Kolika je vjerojatnost da će izvući plavu kuglicu?
   b) Kolika je vjerojatnost da će izvući crvenu kuglicu?
   c) Koliko najmanje kuglica Matko treba izvući kako bi sa sigurnošću mogao tvrditi da je izvučena kuglica plave boje?

Rješenje.

a)
A – izvučena kuglica je plave boje.

$$P(A) = \frac{\text{broj plavih kuglica}}{\text{ukupan broj kuglica}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

b)
B – izvučena kuglica je crvene boje.

$$P(B) = \frac{\text{broj crvenih kuglica}}{\text{ukupan broj kuglica}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Ta dva događaja (A i B) su jednako vjerojatna.

c) Najnepovoljniji slučaj je da Matko izvuče redom tri crvene kuglice. Tada u vrećici ostaju samo plave kuglice. U idućem, četvrtom, izvlačenju će sigurno izvući kuglicu plave boje.
Matko treba izvući minimalno četiri kuglice kako bi sa sigurnošću mogao tvrditi da je izvučena kuglica plave boje.

3. Matko ide u 4. razred. Likovnu kulturu ima jednom tjedno (bilo koji dan od ponedjeljka do petka). Kolika je vjerojatnost da od prve pogodimo koji dan Matko ima likovnu kulturu? Kolika je vjerojatnost da ne pogodimo taj dan?

Rješenje.

Definiramo događaje.

A – pogodili smo dan kada Matko ima likovnu kulturu.

B – nismo pogodili dan kada Matko ima likovnu kulturu.

$P(A) = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

$P(B) = \frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%$

4. U slučajnom pokusu bacamo standardnu igraću kockicu te bilježimo dobiveni broj.
   a) Odredite prostor svih elementarnih događaja ovog slučajnog pokusa.
   b) Kolika je vjerojatnost da se okrenuo:
      b_1) broj 6 b_2) broj 7 b_3) broj manji od 10 b_4) složen broj?

Rješenje.

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b)

b_1)

Neka je događaj A – pao je broj 6.

$$P(A) = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667 = 16{,}67\%$$

b_2)

Neka je događaj B – pao je broj 7.

$$P(B) = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$$

b_3)

Neka je događaj C – pao je broj manji od 10.

$$P(C) = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

b_4)

Neka je događaj D – pao je složen broj.

$$P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33 = 33\%$$

5. U slučajnom pokusu jednom bacamo simetričan novčić. Rezultat bacanja novčića je ili pismo (P) ili glava (G).
   a) Odredite prostor svih elementarnih događaja ovog slučajnog pokusa.
   b) Kolika je vjerojatnost da je pala
      b_1) glava b_2) pismo?

Rješenje.

a) $\Omega = \{P, G\}$

b) Vjerojatnost da je pala glava je 0,5, odnosno 50%. Ista je vjerojatnost i da je palo pismo, tj. 50%.

6. U posudi se nalazi 300 kuglica. Od toga je 25% crvenih, 17% bijelih, 20% plavih, 8% zelenih, a ostale su šarene. Igrač bez gledanja izvlači po jednu kuglicu i vraća ju natrag u posudu.

a) Koliko ima crvenih, bijelih, plavih, zelenih i šarenih kuglica?

b) Kolika je vjerojatnost da će igrač izvući žutu kuglicu?

c) Kolika je vjerojatnost da će igrač izvući crvenu kuglicu?

d) Kolika je vjerojatnost da je izvučena bijela ili crvena kuglica?

e) Kolika je vjerojatnost da je izvučena jednobojna kuglica?

f) Postoji li kakva veza između izračunate vjerojatnosti i postotaka zadanih u zadatku?

Rješenje.

a) Računamo udio šarenih kuglica.
100% – (25+17+20+8)% = 100% – 70% = 30%

Boja kuglica	Udio kuglica po bojama (%)	Broj kuglica po bojama
Crvena	25	25% od 300 je $\frac{25}{100} \cdot 300 = 25 \cdot 3 = 75$
Bijela	17	17% od 300 je $\frac{17}{100} \cdot 300 = 17 \cdot 3 = 51$
Plava	20	20% od 300 je $\frac{20}{100} \cdot 300 = 20 \cdot 3 = 60$
Zelena	8	8% od 300 je $\frac{8}{100} \cdot 300 = 8 \cdot 3 = 24$
Šarena	30	30% od 300 je $\frac{30}{100} \cdot 300 = 30 \cdot 3 = 90$
Ukupno(Σ):	100	300

Crvenih kuglica je 75, bijelih 51, plavih 60, zelenih 24, a šarenih 90.

b) Događaj A – izvučena je žuta kuglica.

$$P(A) = \frac{\text{broj žutih kuglica}}{\text{ukupan broj kuglica}} = \frac{0}{300} = 0 = 0\%$$

c) Događaj B – izvučena je crvena kuglica.

$$P(B) = \frac{\text{broj crvenih kuglica}}{\text{ukupan broj kuglica}} = \frac{75}{300} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\%$$

d) Događaj C – izvučena je bijela ili crvena kuglicu.

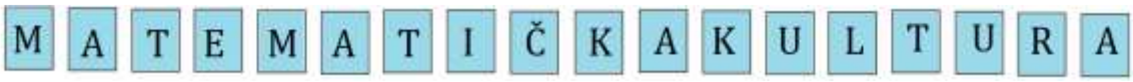
$$P(C) = \frac{\text{broj bijelih ili crvenih kuglica}}{\text{ukupan broj kuglica}} = \frac{51 + 75}{300} = \frac{126}{300} = \frac{42}{100} = 0{,}42 = 42\%$$

e) Događaj D – izvučena je jednobojna kuglica.

$$P(C) = \frac{\text{broj jednobojnih kuglica}}{\text{ukupan broj kuglica}} = \frac{300 - 90}{300} = \frac{210}{300} = \frac{70}{100} = 0{,}70 = 70\%$$

f) Promotrite izračunate vjerojatnosti i postotke u zadatku pa zaključite.

7. Luka i Matko imaju osamnaest karata sa slovima koja čine riječi MATEMATIČKA KULTURA.



Nakon što se karte izmiješaju iz tog kompleta karata izvlači se, bez gledanja, po jedna karta i nakon toga vraća natrag.

a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa slovom?
b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta s brojem?
c) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa slovom A?
d) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa samoglasnikom?
e) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa suglasnikom?
f) Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta sa slovom M, A ili T?

Rješenje.

a) Sve karte su sa slovom pa je događaj da je izvučena karta sa slovom siguran događaj. Vjerojatnost takvog događaja je 1.
Neka je događaj A – izvučena je karta sa slovom.

$$P(A) = \frac{\text{broj karata sa slovom}}{\text{ukupan broj svih karata}} = \frac{18}{18} = 1 = 100\%$$

b) Niti jedna karta nije s brojem pa je događaj da je izvučena karta s brojem nemoguć događaj. Vjerojatnost takvog događaja je 0.
Neka je događaj B – izvučena je karta s brojem.

$$P(B) = \frac{\text{broj karata s brojem}}{\text{ukupan broj svih karata}} = \frac{0}{18} = 0 = 0\%$$

c) Neka je događaj C – izvučena je karta sa slovom A.

$$P(C) = \frac{\text{broj karata sa slovom A}}{\text{ukupan broj svih karata}} = \frac{4}{18} \approx 0{,}22 = 22\%$$

d) Neka je događaj D – izvučena je karta sa samoglasnikom.

$$P(D) = \frac{\text{broj karata sa samoglasnikom}}{\text{ukupan broj svih karata}} = \frac{8}{18} \approx 0{,}44 = 44\%$$

e) Neka je događaj E – izvučena je karta sa suglasnikom.

$$P(E) = \frac{\text{broj karata sa suglasnikom}}{\text{ukupan broj svih karata}} = \frac{10}{18} \approx 0{,}56 = 56\%$$

f) Neka je događaj F – izvučena je karta sa slovom M, A ili T.
Sa slovom M, A ili T ima 9 karata.

$$P(F) = \frac{\text{broj karata sa slovom M, A ili T}}{\text{ukupan broj svih karata}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

8. Matko je na kiosku kupio listić lutrije na sreću i platio ga 5 kn. Na njemu piše da je tiskan u 1 000 000 primjeraka, a fond dobitaka je sljedeći:

1	×	100 000 kn
5	×	10 000 kn
10	×	5 000 kn
100	×	1 000 kn
500	×	100 kn
500	×	80 kn
500	×	60 kn
10 000	×	45 kn
10 000	×	15 kn
50 000	×	10 kn
200 000	×	5 kn

Ostali listići nisu dobitni.
Odredite vjerojatnost:
a) da je Matko dobio 100 000 kn
b) da nije dobio ništa
c) da je dobio 60 ili 80 kn
d) da je kupio dobitni listić
e) da je dobio 5 kn
f) da je dobio 9 puta više nego je platio listić.

Koji je događaj za Matka najvjerojatniji?

Rješenje.

a) Neka je događaj A – Matko je dobio 100 000 kn.

$$P(A) = \frac{1}{1000000} = 0{,}000001 = 0{,}0001\%$$

b) Neka je događaj B – Matko nije dobio ništa.
Dobitnih listića je ukupno
$1 + 5 + 10 + 100 + 500 + 500 + 500 + 10000 + 10000 + 50000 + 200000 =$
$= 271616$
Listića koji nisu dobitni ima $1000000 - 271616 = 728384$
$$P(B) = \frac{728384}{1000000} = 0{,}728384 = 72{,}8384\%$$
c) Neka je događaj C – Matko je dobio 60 ili 80 kn.
Dobitnih listića u vrijednosti 60 kn ili 80 kn ima ukupno $500 + 500 = 1000$
$$P(C) = \frac{1000}{1000000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001 = 0{,}1\%$$
d) Neka je događaj D – Matko je kupio dobitni listić.

Dobitnih listića je ukupno 271616.
$$P(D) = \frac{271616}{1000000} = 0{,}271616 = 27{,}1616\%$$
e) Neka je događaj E – Matko je dobio 5 kn.
$$P(E) = \frac{200000}{1000000} = 0{,}2 = 20\%$$
f) Neka je događaj F – Matko je dobio 9 puta više nego je platio listić.
$$P(F) = \frac{10000}{1000000} = 0{,}01 = 1\%$$
Najvjerojatnije je da Matko neće ostvariti dobitak.

9. U slučajnom pokusu zavrtimo kazaljku na sredini kruga koji je podijeljen na sukladna polja (kružne isječke) koja su obojana žutom, zelenom ili ružičastom bojom i u svako je polje upisano jedno od četiri slova abecede (A, B, C ili D). Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja?

a) Kazaljka se zaustavila na polju ružičaste boje.
b) Kazaljka se zaustavila na polju sa slovom B.
c) Kazaljka se nije zaustavila na zelenom polju.
d) Kazaljka se zaustavila na žutom polju sa slovom B.

Rješenje.

a) Neka je događaj A – kazaljka se zaustavila na polju ružičaste boje.
Od ukupno 13 polja 6 ih je ružičaste boje.
$$P(A) = \frac{6}{13} \approx 0{,}4615 = 46{,}15\%$$
b) Neka je događaj B – kazaljka se zaustavila na polju sa slovom B.
Od ukupno 13 polja 4 ih je sa slovom B.
$$P(B) = \frac{4}{13} \approx 0{,}3077 = 30{,}77\%$$
c) Neka je događaj C – kazaljka se nije zaustavila na zelenom polju.

Od ukupno 13 polja 3 su zelena. 10 polja nisu obojana zelenom bojom.

$$P(C)=\frac{10}{13}\approx 0{,}7692=76{,}92\%$$

d) Neka je događaj D – kazaljka se zaustavila na žutom polju sa slovom B.
Od ukupno 13 polja 2 polja su žuta sa slovom B.

$$P(D)=\frac{2}{13}\approx 0{,}1538=15{,}38\%$$

10. Na karticama su napisani rimski brojevi od I do XII. Kartice su izmiješane, a zatim složene u red tako da se ne vide napisani brojevi.

Okrenuta je prva kartica i na njoj piše broj VI.

a) Je li moguće da na drugoj kartici piše broj veći od XII?
b) Je li moguće da na drugoj kartici piše broj manji od XIII?
c) Je li moguće da na drugoj kartici piše broj manji od IX?

Okrenuta je druga kartica i na njoj piše broj X.

d) Je li vjerojatnije da na sljedećoj kartici piše broj veći od VI ili manji od VI?
e) Je li vjerojatnije da na sljedećoj kartici piše paran broj ili neparan broj?

Rješenje.

a) Nemoguć događaj.
b) Siguran događaj.
c) Moguć događaj.
d) Ostalo je pet kartica s brojevima manjim od VI (I, II, III, IV, V) i pet kartica s brojevima većim od VI (VII, VIII, IX, XI, XII). Ta dva događaja su jednako vjerojatna.
e) Od preostalih brojeva na karticama šest je neparnih, a četiri su parna broja. Vjerojatnije je da će na sljedećoj kartici pisati neparan broj.

11. (zadatak za vježbu) Bačena je igraća kocka čije su strane označene brojevima od 1 do 6. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

A – pao je paran broj,
B – pao je neparan broj,
C – pao je broj manji od 4,
D – pao je broj 0,
E – pao je prost broj,
F – pao je broj djeljiv s 3.

Rješenje.

$$P(A)=\frac{3}{6}=0{,}5 \qquad P(B)=\frac{3}{6}=0{,}5 \qquad P(C)=\frac{3}{6}=0{,}5$$

$$P(D)=\frac{0}{6}=0 \qquad P(E)=\frac{3}{6}=0{,}5 \qquad P(F)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$$

12. (zadatak za vježbu) Računalo na slučajan način bira jedan od prirodnih brojeva između 1 i 80 (uključujući i brojeve 1 i 80). Kolika je vjerojatnost da je izabran broj

a) 40 b) manji od 16 c) veći od 44

d) višekratnik broja 2 e) djelitelj broja 30 f) prost broj

g) kvadrat nekog broja h) veći od 80 i) manji od 100?

Rješenje.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 79, 80\}$ je prostor elementarnih događaja.

a) A – Izabran je broj 40. $A = \{40\}$

$$p(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{1}{80} = 0{,}0125 = 1{,}25\%$$

b) B – Izabran je broj manji od 16. $B = \{1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$

$$p(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{15}{80} = 0{,}1875 = 18{,}75\%$$

c) C – Izabran je broj veći od 44. $C = \{45, 46, 47, \dots, 79, 80\}$

$$p(C) = \frac{k(C)}{k(\Omega)} = \frac{36}{80} = 0{,}45 = 45\%$$

d) D – Izabran je višekratnik broja 2. $D = \{2, 4, 6, \dots, 78, 80\}$

$$p(D) = \frac{40}{80} = 0{,}5 = 50\%$$

e) E – Izabran je djelitelj broja 30. $E = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,

$$p(E) = \frac{8}{80} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$$

f) F – Izabran je prost broj.

$F = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79\}$

$$p(F) = \frac{22}{80} = 0{,}275 = 27{,}5\%$$

g) G – Izabran je kvadrat nekog broja. $G = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}$

$$p(G) = \frac{8}{80} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$$

h) H – Izabran je broj veći od 80. $H = \emptyset$

$$p(H) = \frac{0}{80} = 0 = 0\%$$

i) I – Izabran je broj manji od 100. $I = \{1,2, \dots ,79, 80\}$

$$p(I) = \frac{80}{80} = 1 = 100\%$$

13. U kutiji se nalazi 30 kartica. Na svakoj od njih napisano je po jedno slovo hrvatske abecede. Kartice su promiješane i iz kutije se bez gledanja izvlači jedna kartica. Kartica se nakon izvlačenja stavlja natrag u kutiju. Bod u igri dobiva dijete čije ime sadrži izvučeno slovo. Kolika je vjerojatnost da bod dobije dijete čije je ime

a) MATKO b) FABIJAN c) IVA d) TOMISLAV e) ALOJZIJE?

Rješenje.

$\Omega = \{A, B, C, \dots, Z, Ž\}$ je prostor elementarnih događaja.

a) A – Izvučena je kartica sa slovom koje je sadržano u imenu MATKO, tj. izvučena je kartica sa slovom iz skupa slova $A = \{A, K, M, O, T\}$.

$$p(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667 = 16{,}67\%$$

b) B – Izvučena je kartica sa slovom koje je sadržano u imenu FABIJAN, tj. izvučena je kartica sa slovom iz skupa slova $B = \{ A, B, F, I, J, N\}$.

$$p(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

c) C – Izvučena je kartica sa slovom koje je sadržano u imenu IVA, tj. izvučena je kartica sa slovom iz skupa slova $C = \{A, I, V\}$.

$$p(C) = \frac{k(C)}{k(\Omega)} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$$

d) D – Izvučena je kartica sa slovom koje je sadržano u imenu TOMISLAV, tj. izvučena je kartica sa slovom iz skupa slova $D=\{A, I, L, M, O, S, T, V\}$.

$$p(D) = \frac{k(D)}{k(\Omega)} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \approx 0{,}2667 = 26{,}67\%$$

e) E – Izvučena je kartica sa slovom koje je sadržano u imenu ALOJZIJE, tj. izvučena je kartica sa slovom iz skupa slova $E = \{A, E, I, J, L, O, Z\}$.

$$p(E) = \frac{k(E)}{k(\Omega)} = \frac{7}{30} \approx 0{,}23 = 23{,}33\ \%$$

14. Na karticama su napisani svi dvoznamenkasti brojevi. Kartice su izmiješane, a zatim složene u red tako da se ne vide napisani brojevi. Izrazite u postotcima vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) izvučena je kartica na kojoj se nalazi broj s različitim znamenkama

b) izvučena je kartica na kojoj se nalazi broj manji od broja 70

c) izvučena je kartica na kojoj se nalazi neparan broj

d) izvučena je kartica na kojoj se nalazi broj djeljiv s 5.

Rješenje.

$\Omega = \{10, 11, 12, \dots, 98, 99\}$ je prostor elementarnih događaja.

$k(\Omega) = 9 \cdot 10 = 90$

90 je dvoznamenkastih brojeva.

a) A – Izvučena je kartica na kojoj se nalazi broj s različitim znamenkama.

Koliko je dvoznamenkastih brojeva s istim znamenkama? Takvih brojeva je $9 \cdot 1 = 9$

To su brojevi: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 i 99.

$k(A) = 90 - 9 = 81$

ili

$k(A) = 9 \cdot 9 = 81$

$$p(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10} = 0,9 = 90\%$$

Vjerojatnost da je izvučena kartica na kojoj se nalazi broj s različitim znamenkama je 90%.

b) B – Izvučena je kartica na kojoj se nalazi broj manji od broja 70.

Koliko je dvoznamenkastih brojeva manjih od broja 70?

To su brojevi: 10, 11, 12, ..., 68, 69.

Takvih brojeva je $6 \cdot 10 = 60$.

$k(B) = 60$

$$p(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} \approx 0,6667 = 66,67\%$$

Vjerojatnost da je izvučena kartica na kojoj se nalazi broj manji od broja 70 je približno 66,67%.

c) C – Izvučena je kartica na kojoj se nalazi neparan broj.

Koliko je dvoznamenkastih neparnih brojeva?

To su brojevi: 11, 13, 15, ..., 97, 99.

Takvih brojeva je $9 \cdot 5 = 45$.

$k(C) = 45$

$$p(C) = \frac{k(C)}{k(\Omega)} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Vjerojatnost da je izvučena kartica na kojoj se nalazi neparan broj je 50%.

d) D – Izvučena je kartica na kojoj se nalazi broj djeljiv s 5.

Koliko je dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 5?

To su brojevi: 10, 15, 20, ..., 90, 95.

Takvih brojeva je $9 \cdot 2 = 18$.

$k(D) = 18$

$$p(D) = \frac{k(D)}{k(\Omega)} = \frac{18}{90} = \frac{2}{10} = 0,2 = 20\%$$

Vjerojatnost da je izvučena kartica na kojoj se nalazi broj djeljiv s 5 je 20%.

15. (zadatak za vježbu) Na karticama je ispisano prvih petsto prirodnih brojeva. Kartice su izmiješane, a zatim složene u red tako da se ne vide napisani brojevi.
Izrazite u postotcima vjerojatnost događaja izvučena je kartica na kojoj se nalazi troznamenkasti broj.

Rješenje. $\frac{401}{500} = \frac{802}{1000} = 0{,}802 = 80{,}2\%$.

16. U slučajnom pokusu dva puta zaredom bacamo simetričan novčić i bilježimo rezultat.
   a) Odredite prostor svih elementarnih događaja ovog slučajnog pokusa.
   b) Kolika je vjerojatnost da je:
      b_1) oba puta palo pismo b_2) barem jednom palo pismo?

Rješenje.

a) $\Omega = \{(P,P),(P,G),(G,P),(G,G)\}$
b)

b_1) Neka je događaj A – oba puta je palo pismo. $A = \{(P,P)\}$

Vjerojatnost događaja A je

$$p(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

b_2) Neka je događaj B – barem jednom je palo pismo. $B = \{(P,P),(P,G),(G,P)\}$

Vjerojatnost događaja B je

$$p(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

17. U slučajnom pokusu bacamo standardnu igraću kockicu dva puta te bilježimo dobivene brojeve.
   a) Odredite prostor svih elementarnih događaja ovog slučajnog pokusa.
   b) Kolika je vjerojatnost da
      b_1) je zbroj brojeva koji su pali na kockici sedam ili osam

      b_2) su se oba puta na kockici okrenuli prosti brojevi?

Rješenje.

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(1{,}1),(1{,}2),(1{,}3),(1{,}4),(1{,}5),(1{,}6),(2{,}1),(2{,}2),$

$(2{,}3),(2{,}4),(2{,}5),(2{,}6),\ldots,(6{,}3),(6{,}4),(6{,}5),(6{,}6)\}$

$k(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$

b) b_1) A – Zbroj brojeva koji su pali na kockici je sedam ili osam.

$A = \{(1{,}6),(2{,}5),(3{,}4),(4{,}3),(5{,}2),(6{,}1),(2{,}6),(3{,}5),(4{,}4),(6{,}2),(5{,}3)\}$

$$p(A) = \frac{11}{36} \approx 0{,}3056 = 30{,}56\ \%.$$

b2) B – Oba puta su se na kockici okrenuli prosti brojevi.

$$B = \{(2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5), (5,2), (5,3), (5,5)\}$$

$$p(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\ \%.$$

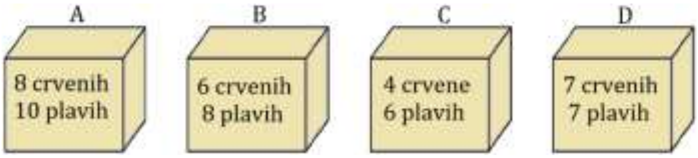
18. (zadatak za vježbu) Matko iz špila od 32 karte („mađarice“) izvlači jednu kartu. Izračunajte i izrazite postotkom vjerojatnost da je Matko izvukao kartu:

a) kralja
b) koja nije žir
c) čija je vrijednost višekratnik broja 3
d) čija je vrijednost manja od 8.

As vrijedi 1, dečko 2, dama 3, kralj 4, sedmica 7, osmica 8, devetka 9, desetka 10, a „boje“ su list , žir , bundeva  i srce .

Rješenje. a) 12,5% b) 75% c) 25% d) 62,5%

19. (zadatak za vježbu) Svaka od dane četiri kutije A, B, C i D sadrži crvene i plave kuglice kao što je na njima označeno na slici.



a) Matko želi ne gledajući uzeti jednu kuglicu iz jedne od kutija.

a_1) Iz koje kutije Matko treba izvući kuglicu kako bi vjerojatnost da izvuče plavu kuglicu bila najveća?

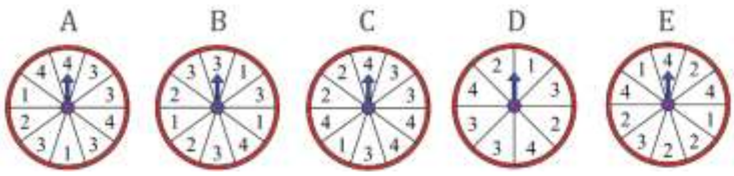
a_2) Iz koje kutije Matko treba izvući kuglicu kako bi vjerojatnost da izvuče plavu kuglicu bila najmanja?

b) Koliko još plavih kuglica trebamo dodati u svaku od pojedinih kutija kako bi vjerojatnost da će Matko izvući plavu kuglicu za bilo koju od kutija bila 75% ?

20. (zadatak za vježbu) U igri zavrtimo kazaljku koja je u središtu kruga. Dobitno polje je polje s brojem 2. Koju od pet ponuđenih slika (A, B, C, D, E) treba izabrati za igru u kojoj je vjerojatnost da kazaljka stane na broj 2

a) najveća b) najmanja?

Obrazložite odgovor.



Rješenje. a) E – 40% b) A – 10%.

IX. ELEMENTI STATISTIKE

ZADATCI

1. Tijekom tjedan dana Matkova je obitelj primila 6, 4, 2, 3, 4, 2 i 0 pisama. Koliki je prosječni broj dnevno primljenih pisama?

Rješenje.

$$\frac{6+4+2+3+4+2+0}{7}=\frac{21}{7}=3$$

Prosječni broj dnevno primljenih pisama je 3.

2. Četiri bubamare sletjele su na cvijet. Jedna je imala tri, druga šest, treća četiri, a četvrta osam točkica. Ubrzo im se pridružila još jedna.
   a) Koliko je ona imala točkica ako je sada prosjek broja točkica jednak 6?
   b) Bubamara u jednoj sekundi krilima zamahne prosječno 85 puta. Koliko puta bubamara zamahne krilima u jednome satu?

Rješenje.

a)

$$\frac{3+6+4+8+\square}{5}=6$$

$$3+6+4+8+\square=30$$

$$21+\square=30$$

$$\square=9$$

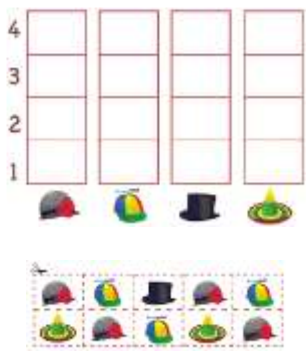
Peta je bubamara imala 9 točkica.

b) $1\ \text{h} = 60\ \text{min} = 3600\ \text{s}$

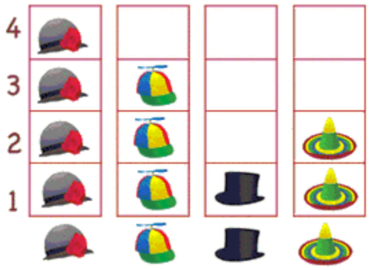
$$85\cdot 3600=306000$$

U jednome satu bubamara zamahne 306000 puta.

3. Izrežite slike šešira te ih posložite u određeni stupac. Kružnim dijagramom prikažite udjele vrsta šešira.



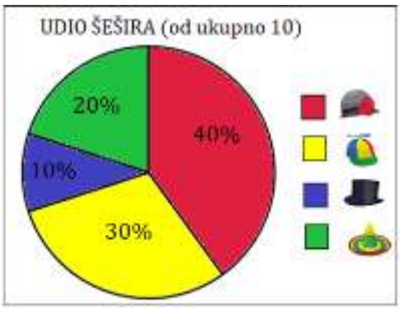
Rješenje.



Ovaj prikaz podataka zovemo PIKTOGRAM (slikovni prikaz podataka).

ŠEŠIRI	BROJ	UDIO
	4	$\frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$
	3	$\frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$
	1	$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$
	2	$\frac{2}{10} = 0{,}2 = 20\%$
UKUPNO (Σ):	10	$\frac{10}{10} = 1 = 100\%$

Prikažimo udjele (relativne frekvencije) kružnim dijagramom.



Ovaj prikaz podataka zovemo kružni dijagram. Kružnim dijagramom prikazujemo udjele (relativne frekvencije).

4. Iva je prebrojila voće iz košara. Svaki je komad voća u tablici prikazala crtom te je tako prikazala sve podatke.

KOŠARA VOĆA	
VOĆE	BROJ KOMADA VOĆA
JABUKA	𝍸 𝍸 ||
MANGO	𝍸 |
ANANAS	𝍸 |||
JAGODA	𝍸 𝍸 ||||
LUBENICA	||||

Ovaj prikaz prikupljenih podataka zovemo prikaz pomoću tablice crtica (Tally graf).

Prikažite Ivine podatke:

a) tablično

b) piktogramom

c) piktogramom ako je  = 2 (krug označava dva komada voća)

d) stupčastim dijagramom

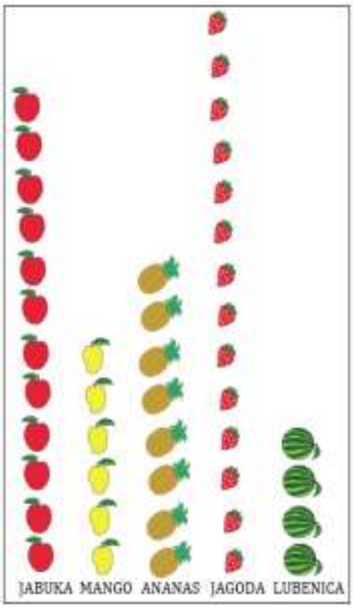
e) kružnim dijagramom.

Rješenje.

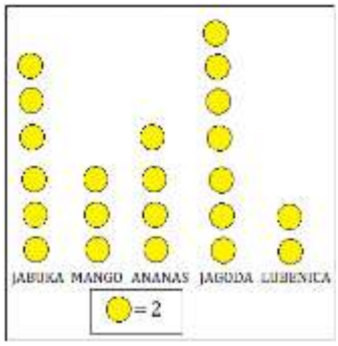
a)

VOĆE	BROJ KOMADA VOĆA
JABUKA	12
MANGO	6
ANANAS	8
JAGODA	14
LUBENICA	4

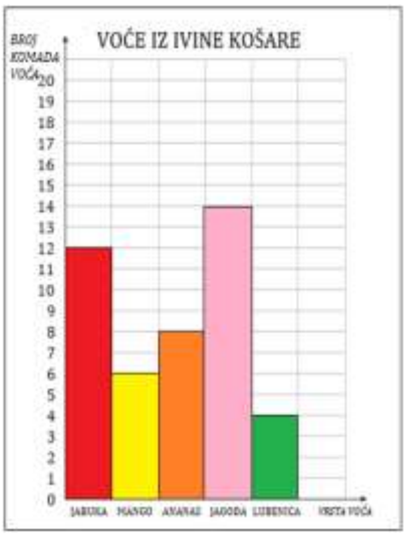
b)



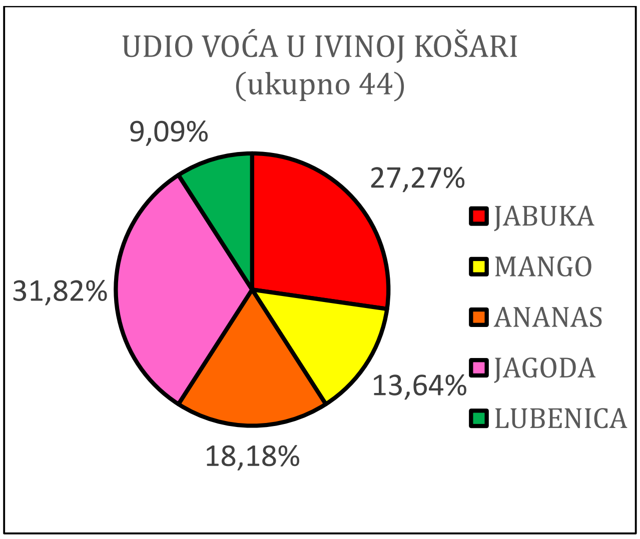
c)



d)

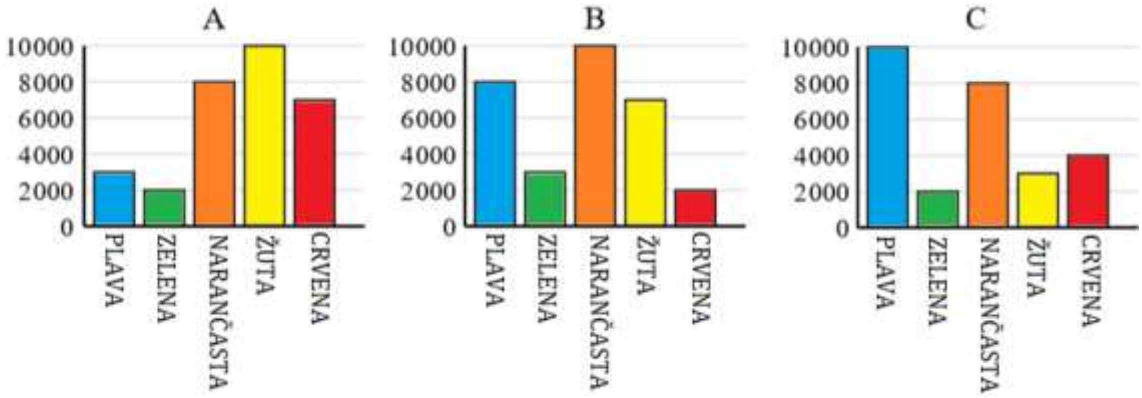


e)



5. (zadatak za vježbu) Koji od stupčastih dijagrama A, B ili C prikazuje podatke iz tablice?

OMILJENA BOJA	PLAVA	ZELENA	NARANČASTA	ŽUTA	CRVENA
BROJ LJUDI	10000	2000	8000	3000	4000



Rješenje. C.

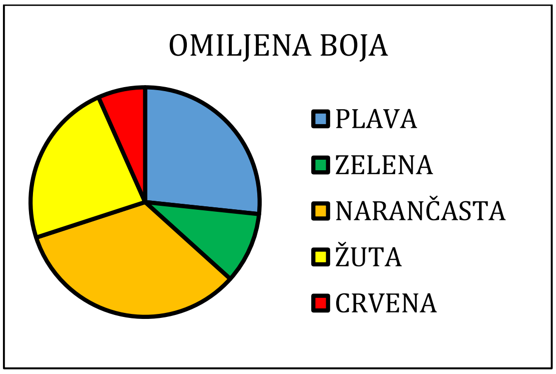
6. (zadatak za vježbu) Izračunajte i izrazite udjele omiljenih boja u postotcima (zaokružite na dvije decimale) pa nadopunite tablicu.

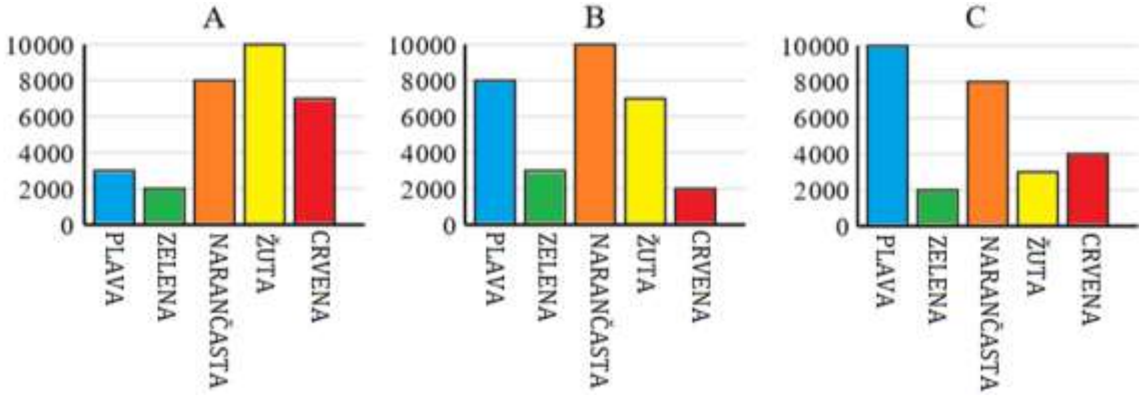
OMILJENA BOJA	PLAVA	ZELENA	NARANČASTA	ŽUTA	CRVENA
BROJ LJUDI	10000	2000	8000	3000	4000
UDIO LJUDI (%)	?	?	?	?	?

Rješenje.

OMILJENA BOJA	PLAVA	ZELENA	NARANČASTA	ŽUTA	CRVENA
BROJ LJUDI	10000	2000	8000	3000	4000
UDIO LJUDI (%)	37,04	7,41	29,63	11,11	14,81

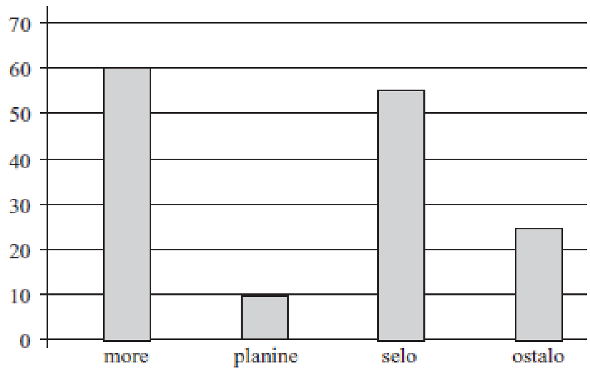
7. (zadatak za vježbu) Koji od stupčastih dijagrama A, B ili C prikazuje podatke dane kružnim dijagramom?





Rješenje. B.

8. Stupčastim dijagramom prikazani su podaci o mjestu na kojem će djeca jednog vrtića ljetovati sa svojim roditeljima.



a) Koliko je djece sudjelovalo u anketi?

b) Gdje će najviše djece, a gdje najmanje provesti ljetne praznike?

c) Koliki je udio djece koja će ljetovati na selu?

Rješenje.

a) $60 + 10 + 55 + 25 = 150$

U anketi je sudjelovalo 150 djece.

b) Najviše djece, njih 60 će ljetne praznike provesti na moru, a najmanje, njih 10 u planinama.

c) Udio djece koja će ljetovati na selu iznosi $\frac{55}{150} = \frac{11}{30} \approx 0{,}37 = 37\%$.

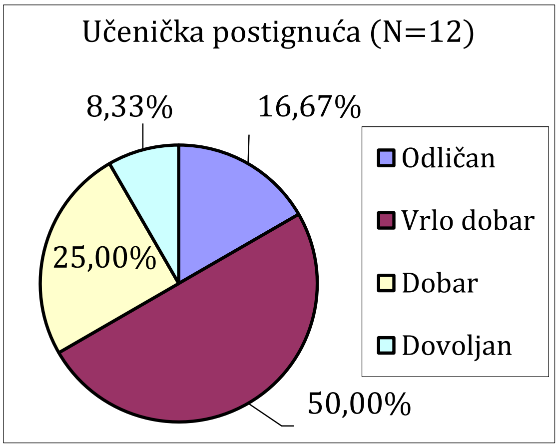
9. U tablici su dana učenička postignuća.

Ocjena	Odličan	Vrlo dobar	Dobar	Dovoljan
Broj učenika	2	6	3	1

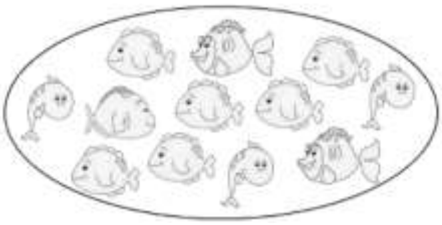
Predočite kružnim dijagramom učenička postignuća.

Rješenje.

Ocjena	Odličan	Vrlo dobar	Dobar	Dovoljan
Broj učenika	2	6	3	1
Udio učenika	$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\approx 0{,}1667$	$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=0{,}5$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{1}{12}\approx 0{,}0833$



10. (zadatak za vježbu) Matko ima četiri vrste ribica u svom akvariju. Nacrtao je sve ribice (vidi sliku).



a) Stupčastim dijagramom prikažite broj ribica u akvariju.

b) Kružnim dijagramom prikažite udjele ribica u akvariju.

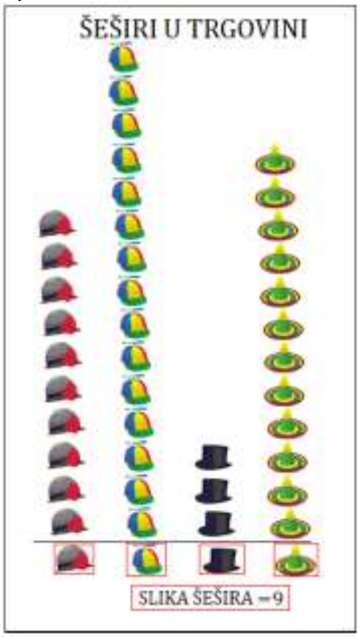
11. Obrt Šeširko proizvodi četiri vrste šešira. U jednom su mjesecu proizveli ukupno 360 šešira. Kružni dijagram prikazuje udjele vrsta šešira proizvedenih u tom mjesecu. Upotpunite kružni dijagram.
Prikažite proizvodnju šešira u tom mjesecu:

a) piktogramom ako jedna slika šešira predstavlja devet šešira

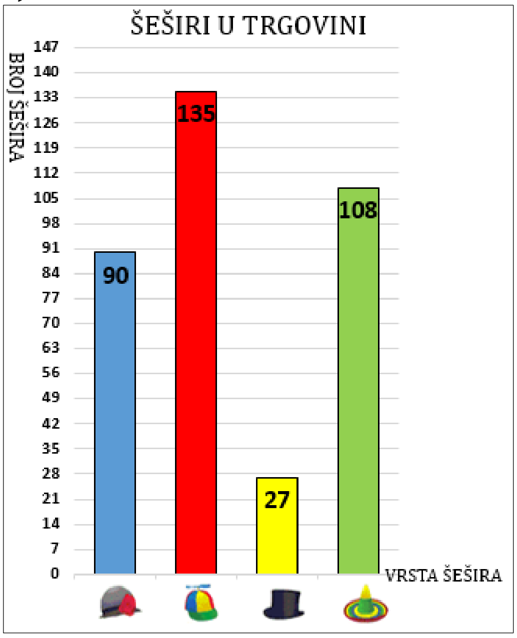
b) stupčastim dijagramom.

Rješenje.

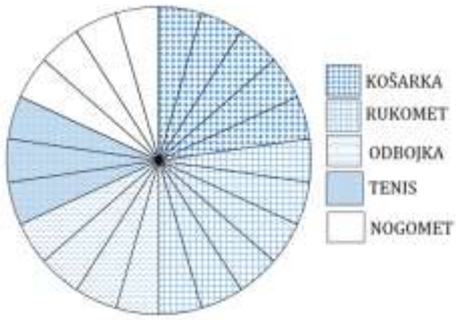
a)



b)



12. (zadatak za vježbu) U jednoj školi od 627 učenika njih 418 se bavi jednom od pet izvanškolskih sportskih aktivnosti. Opredjeljenje učenika je prikazano kružnim dijagramom (vidi sliku).



a) Uz svaku sportsku aktivnost upotpunite dani kružni dijagram odgovarajućim postotcima.

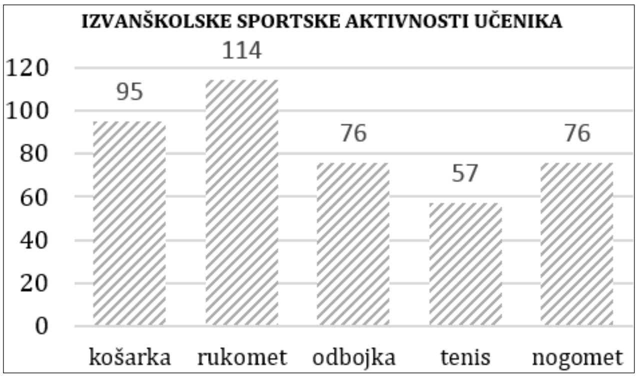
b) Izračunajte koliko se učenika bavi pojedinom izvanškolskom sportskom aktivnosti te rezultate prikažite stupčastim dijagramom.

Rješenje.

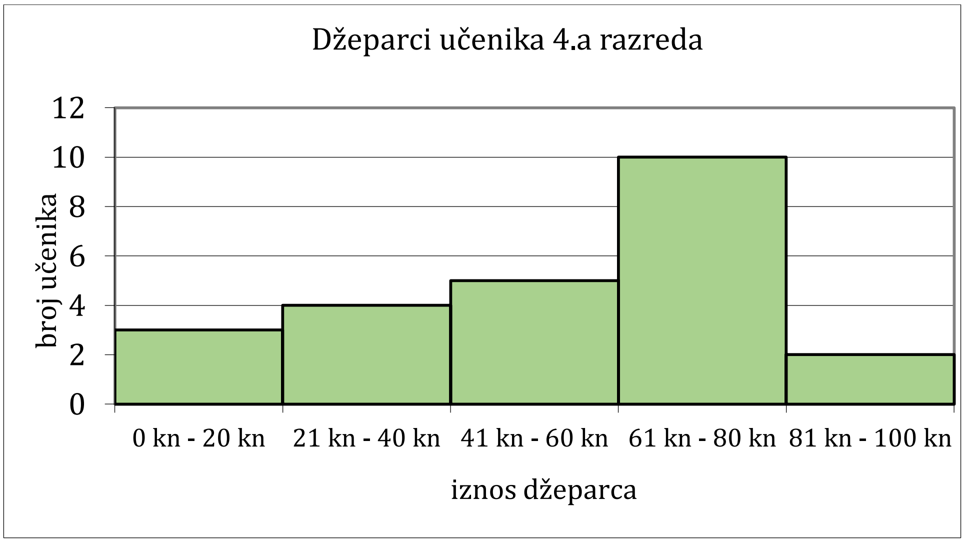
IZVANŠKOLSKA SPORTSKA AKTIVNOST	UDIO UČENIKA	BROJ UČENIKA
košarka	22,73 %	95
rukomet	27,27 %	114
odbojka	18,18 %	76
tenis	13,64 %	57
nogomet	18,18 %	76
Ukupno:	100 %	418

a)

b)



13. Što prikazuje sljedeći dijagram? Koliko je učenika u 4.a? Koliki je udio učenika koji dobije više od 40 kn za džeparac?



Rješenje.

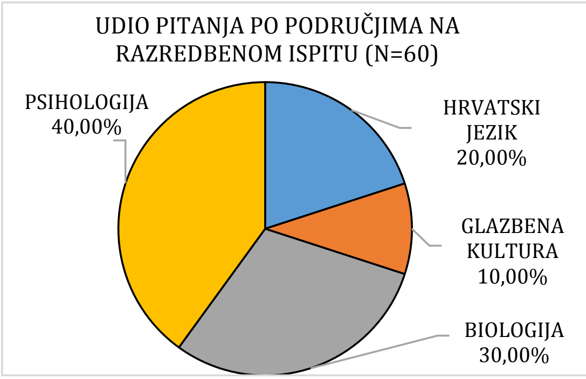
Dijagram prikazuje iznose džeparaca učenika 4.a razreda raspoređene unutar intervala.

$3 + 4 + 5 + 10 + 2 = 24$

U 4.a je 24 učenika.

Udio učenika koji dobije više od 40 kn za džeparac je $\frac{5+10+2}{24} = \frac{17}{24} \approx 0{,}71 = 71\%$.

14. Razredbeni ispit za studij odgojiteljice čini ukupno 60 pitanja podijeljenih na četiri područja: hrvatski jezik, glazbena kultura, biologija i psihologija. Svako pitanje je vrijedilo po jedan bod. Dani kružni dijagram prikazuje udjele pitanja po područjima na razredbenom ispitu.



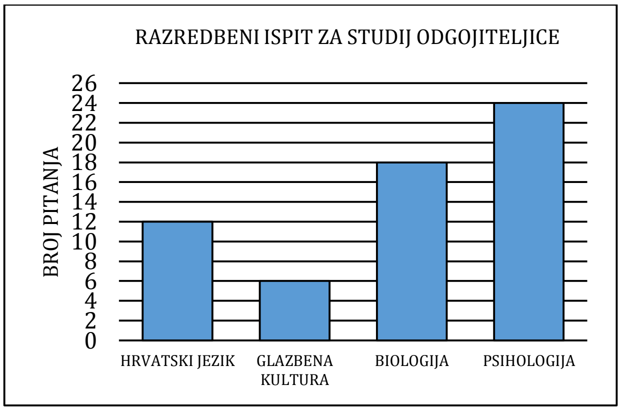
a) Izračunajte broj pitanja po područjima na razredbenom ispitu te ih prikažite stupčastim dijagramom.

b) Ako je kandidat točno odgovorio na 54 pitanja, koliki je postotak ostvario?

Rješenje.

a)

Područje:	Udio pitanja	Broj pitanja
HRVATSKI JEZIK	20 %	12
GLAZBENA KULTURA	10 %	6
BIOLOGIJA	30 %	18
PSIHOLOGIJA	40 %	24
UKUPNO	100%	60



b) $54 : 60 = 0{,}9$

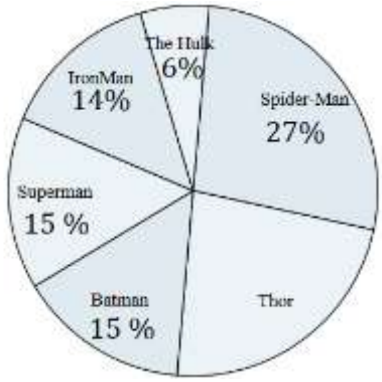
Kandidat je ostvario 90%.

15. (zadatak za vježbu) Vedran je u kutiji imao tri puta manje bijelih pikula nego crvenih, a plavih za deset više nego bijelih pikula. Kada je prijatelju darovao po pet pikula od svake boje, ostalo mu je 45 pikula.

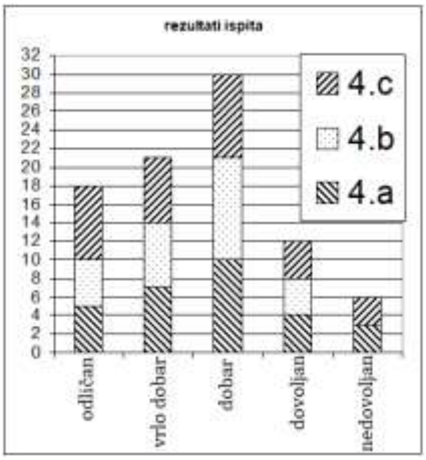
Koliko je pikula pojedine boje Vedran imao na početku?

Kružnim dijagramom prikažite udjele pojedinih boja pikula u kutiji prije darivanja. Izrazite udjele u postotcima na dvije decimale. Koristite geometrijski pribor za izradu kružnog dijagrama.

16. (zadatak za vježbu) U anketi o najdražem superheroju sudjelovalo je 200 ispitanika i svaki je odabrao jednog od ponuđenih šest superheroja.
Upotpunite dani kružni dijagram.
Izračunajte broj ispitanika koji su odabrali pojedinog superheroja.
Dobivene podatke prikažite stupčastim dijagramom.



17. (zadatak za vježbu) Iz grafičkog prikaza rezultata ispita provedenog u 4.a, 4.b i 4.c razredu popunite danu tablicu te izračunajte koji je razred najuspješnije riješio ispit.



	4.a	4.b	4.c	ukupno:
odličan				
vrlo dobar				
dobar				
dovoljan				
nedovoljan				
ukupno:				

LITERATURA

Obvezna literatura:

[1] Kolar – Šuper, R. *Matematička kultura i komunikacija*, Predavanja na 1. godini Preddiplomskog sveučilišnog studija ranoga i predškolskoga odgoja i obrazovanja – skripta, Osijek.

Dopunska literatura:

[2] Kurepa, S. (1984.) *Uvod u matematiku*, Tehnička knjiga, Zagreb

[3] Pavković, B., Veljan, D. (1992.) *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb

[4] MATKA: *časopis za mlade matematičare*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb